

Міністерство освіти і науки України
Національна академія наук України
Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу»
Національного технічного університету України «Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського»

Міністерство освіти і науки України
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Хоменко Ольга Володимирівна

УДК 51-74, 517.9, 62-50

ДИСЕРТАЦІЯ
**КЕРУВАННЯ ПОТОКОМ В ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ НА
ОСНОВІ ВЛАСТИВОСТЕЙ СПІЙМАНИХ ВИХОРИВ**

01.05.04 — системний аналіз і теорія оптимальних рішень

Технічні науки

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук
Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О.В. Хоменко

Науковий керівник: Касьянов Павло Олегович, доктор фізико-математичних
наук, доцент

Київ–2018

АНОТАЦІЯ

Хоменко О.В. Керування потоком в гідродинамічних системах на основі властивостей спійманих вихорів.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.04 – Системний аналіз і теорія оптимальних рішень (технічні науки). Навчально-науковий комплекс «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського». Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2018.

Дисертаційна робота присвячена вирішенню актуальної задачі підвищення енергоефективності гідродинамічних систем з обтіканням шляхом розробки нових методів керування пристінною течією на основі властивостей спійманих вихорів.

Проблема енергозбереження є однією з найважливіших, що особливо гостро постала в останні десятиріччя в багатьох сферах діяльності людства. Зменшення гідродинамічного опору рухомих тіл являє собою один з найбільш значних резервів економії енергоресурсів в гідродинамічних системах. Одним зі шляхів підвищення енергоефективності гідродинамічних систем є керування потоком в таких системах. Під керуванням потоком в науковій літературі розуміють таке перетворення (зміну) потоку, що спрямоване на досягнення необхідної мети залежно від простору та часу. Метою може бути зменшення гідродинамічного опору, підіймальної сили, інтенсифікація перемішування, покращення тепло- та масопереносу тощо. Розв'язання цих задач спрямоване на підвищення енергоефективності гідродинамічних систем.

Гідродинамічні системи, як правило, описуються рівняннями в частинних похідних. Незважаючи на значний прогрес в розвитку теорії

керування системами, які описуються рівняннями в частинних похідних, розв'язання задач керування такими системами є складним. Особливо це стосується задач керування потоком в нетривіальних областях з високим числом Рейнольдса. Як показує практика, схеми керування потоком повинні враховувати неоднорідність середовища, наявність збурень та пульсацій, що є невід'ємними характеристиками природніх потоків. Оскільки математичні моделі таких задач базуються на рівняннях Нав'є-Стокса, побудований контролер не може забезпечити розв'язання задачі керування для реального потоку. З іншого боку, застосування простих лінійних моделей не може забезпечити бажаного результату, оскільки течії, які формуються в гідродинамічних системах, є досить складними і нестационарними. Тому розробка нових ефективних методів керування потоком на основі математичних моделей, що адекватно описують гідродинамічну систему та дозволяють розв'язувати поставлені задачі щодо формування необхідної структури потоку, є актуальною задачею.

В роботі встановлено нові властивості спійманих вихорів поблизу нерівностей поверхні та за наявності збурень потоку. Запропоновано метод керування пристінковим потоком в циліндричних канавках, який відрізняється застосуванням модифікованої моделі спійманого вихору і забезпечує необхідні вимоги до формування структури течії. Досліджено випадки параметричного керування течією, коли відкачування рідини відсутнє, активного, (коли потужність відкачування задається) та реактивного керування течією (потужність відкачування рідини залежить від змін у потоці).

Розроблено нелінійний контролер пристінної течії, який відрізняється тим, що враховує рівняння рівноваги спійманого вихору відносно його координат, циркуляції, потужності відкачування рідини і кутової координати точки стоку та умову безвідривного обтікання кутів канавки і забезпечує активне керування зі зворотним зв'язком у нестационарному потоці. Розроблений контролер застосований для розрахунку параметрів активної

керуючої схеми зі зворотним зв'язком у нестационарному потоці, коли система оперативно реагує на зовнішні збурення. Наведені приклади реалізації цієї схеми, коли швидкість зовнішньої течії змінюється періодично або за лінійним законом.

В роботі на основі модифікованої моделі спійманого вихору розв'язано задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра. Для отримання необхідної структури течії запропоновано встановлення двох симетричних пластин, приєднаних до передньої грані квадратного циліндра. Знайдено параметри керуючих пластин, що дозволяють зменшити гідродинамічні навантаження.

Ефективність схеми керування та знайдених параметрів перевірено шляхом чисельного моделювання в'язкого обтікання квадратного циліндра з пластинами в діапазоні середніх чисел Рейнольдса за допомогою вихрового методу. Отримані результати показали значну регуляризацію структури потоку в сліді, особливо при великих числах Рейнольдса розглянутого діапазону. Число Струхала в керованому потоці зростає порівняно з некерованим випадком, особливо при збільшенні числа Рейнольдса. Завдяки регуляризації сліду при керуванні зменшується середній опір і флуктуаційні сили, що діють на квадратний циліндр. Керування потоком дозволяє знизити коефіцієнт гідродинамічного опору квадратного циліндра від 20% при $Re=100$ до 35% при $Re=500$. Керування дозволяє зменшити амплітуду підйимальної сили на 50% – 70% залежно від числа Рейнольдса.

Результати роботи показують, що при розробці нових алгоритмів керування обтіканням поганообтічних тіл для зменшення енерговитрат важливо враховувати топологічні особливості течії.

Результати дисертаційної роботи були впроваджені в Світовий центр даних з геоінформатики та сталого розвитку. Одержані в роботі нові наукові результати використовуються при викладанні теоретичного матеріалу навчальних дисциплін «Елементи нелінійного аналізу» та «Системний аналіз стохастично розподілених процесів» в Інституті прикладного системного

аналізу Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Ключові слова: гідродинамічна система, керування потоком, спійманий вихор, пристінна течія, параметри керування.

Основні результати дисертації опубліковані в 12 наукових публікаціях: 5 наукових статтях в провідних фахових виданнях, з них 1 – у фаховому виданні України [2], що входить до наукометричних баз даних, 4 – в іноземних виданнях [1, 3, 4, 5], а також в 6 тезах доповідей наукових конференцій [7 – 12], та в 1 статті в іншому виданні [6].

1. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-wall Flows with Irregular Boundaries. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Solid Mechanics and Its Applications. Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications, vol.211, pp.115–129. Springer (2014).

2. Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Теоретичні моделі керування пристінковими потоками в гідродинамічних системах. Системні дослідження та інформаційні технології. **4**, 87–99 (2014).

3. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active near-wall flow control via a cross groove with suction. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Studies in Systems, Decision and Control. Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications, vol.30, pp.353–367. Springer (2015).

4. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Flow control near a square prizm with the help of frontal flat plates. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Studies in Systems, Decision and Control. Advances in Dynamical Systems and Control, vol.69, pp.327–350. Springer (2016).

5. Gorban, N.V., Khomenko, O.V, Paliichuk, L.S, Tkachuk, A.M.: Long-time behavior of state functions for climate energy balance model. Discrete & Continuous Dynamical Systems - Series B. **22**(5), 1887-1897 (2017).

6. Горбань, Н.В., Капустян, О.В., Капустян, О.А., Хоменко, О.В.: Сильный глобальный аттрактор трехмерной системы уравнений Навье-Стокса в неограниченной каналоподобной области. Проблемы управления и

інформатики. **6**, 67 – 77 (2015).

7. Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-wall Flows with Irregular Boundaries. In: Abstracts of the Crimea International Mathematical Conference: Book of Abstracts. Sudak, 22 september–4 october 2013.

8. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Theoretical Models of Flow Control in Near-wall Areas. Матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2014, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 26-30 травня, 2014.

9. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active Near-wall Flow Control Via a Cross Groove With Suction. Матеріали третьої Міжнародної конференції пам'яті члена-кореспондента Національної академії наук України Валерія Сергійовича Мельника «Нелінійний аналіз і застосування», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 1–3 квітня, 2015.

10. Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Керування пристінковим потоком за допомогою інтерцептора і відбору рідини. Матеріали 17-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2015, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 22-25 червня, 2015.

11. Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Застосування схеми спійманих вихорів до керування потоком навколо квадратної призми / матеріали 18-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2016, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 30 травня – 2 червня, 2016.

12. Khomenko, O.V.: On Strong Global Attractor for the Three-Dimensional Navier-Stokes System of Equations in Unbounded Domain of Channel Type. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, 18-23 September, 2017.

ABSTRACT

Khomenko O.V. Flow control in hydrodynamic systems based on the properties of trapped vortices. The dissertation for a scientific degree of the Candidate of

Technical Science on the speciality 01.05.04 – System analysis and optimal decisions theory (technical sciences). Educational-scientific complex «Institute for Applied Systems Analysis» of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute». National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, 2018.

The dissertation is devoted to solving the actual problem of increasing the energy efficiency of hydrodynamic systems through the development of new flow control methods which based on properties of trapped vortices.

The problem of energy saving is one of the most important in recent decades in many areas of human activity. Reducing of the hydrodynamic resistance of moving bodies is one of the most significant energy saving reserves in hydrodynamic systems. Flow control is one of the ways to improve the energy efficiency of hydrodynamic systems. Flow control in the scientific literature mean such transformation (change) of the flow, which is directed to achieving the desired goal, depending on space and time. The goal may be to reduce the hydrodynamic resistance, increase the lift, intensify mixing, improve the phenomena of heat and mass transfer, and so on. The solution of these problems is aimed at increasing the energy efficiency of hydrodynamic systems.

Hydrodynamic systems are usually described by partial differential equations. Despite the significant progress in the development of the control theory of systems described by the equations in partial derivatives, solving the control problems of such systems is complicated ones. This is especially true for the flow control problems in non-trivial regions with a high Reynolds number. As practice shows, flow control circuits should take into account the environment heterogeneity, perturbations which are inalienable characteristics of natural flows. Since the mathematical models of such problems are based on the Navier-Stokes equations, a constructed controller can not provide a solution of the control problem for a real flow. On the other hand, using of simple linear models can not provide the desired result, since hydrodynamic systems flows are rather complex and unsteady. Therefore, the development of new effective flow control methods

based on mathematical models which describe adequately the hydrodynamic system and allow solving the set problems of the formation required flow structure is an actual task.

In this work, new properties of trapped vortices near the surface irregularities in the presence of flow perturbations are found. The nonlinear control method of the near-wall flow in cylindrical grooves is proposed. The method differs by using the modified trapped vortex model and provides the necessary requirements for the formation of the flow structure. The following cases of control are investigated: parametric flow control, when there is no suction of the liquid, active control (when the suction power is set) and reactive flow control (the suction power of the fluid depends on the changes in the flow).

The nonlinear controller of the near-wall flow, which differs in that it takes into account the equation of equilibrium of the caught vortex and the unseparated flow condition in the groove edges and provides active feedback control in a non-stationary flow is developed. The developed controller is used to calculate the parameters of an active control circuit with feedback in a non-stationary flow, when the system responds to external perturbation. The examples of the implementation of this scheme, when the speed of the external flow changes periodically or according to the linear law are given.

The problem of reducing the hydrodynamic loads of a square cylinder is solved on via the modified model of the trapped vortex. To obtain the required flow structure, it is proposed to install two symmetrical plates attached to the front side of the square cylinder. The control parameters of a square cylinder with frontal plates which reduce the hydrodynamic load are found.

The efficiency of the control scheme and parameters was verified by numerical simulation of the viscous flow around the cylinder with plates in the middle range of Reynolds numbers via the vortex method. The obtained results showed a significant regularization of the flow structure in the trace. The results showed that the Struhall number in a controlled flow increases, especially when the Reynolds number increases. Due to the regularization of the trace under control,

the mean resistance and the fluctuating forces acting on the cylinder are decreased. Flow control reduces the hydrodynamic resistance of the square prism from 20% at $Re = 100$ to 35% at $Re = 500$. The control allows to reduce the amplitude of the lifting force from 50% to 70% depending on the Reynolds number.

The results of the work show that it is essential to take the flow topology into account when developing new algorithms for flow control near bluff bodies.

The results of the dissertation work were implemented into the World Data Center for Geoinformatics and Sustainable Development. The new scientific results obtained in the work are used in theoretical material teaching of educational disciplines «Elements of nonlinear analysis» and «System analysis of stochastically distributed processes» at the Institute for Applied Systems Analysis of the National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute».

Keywords: hydrodynamic system, flow control, trapped vortex, near-wall flow, control parameters.

The main results of the dissertation are published in 12 scientific papers: 5 scientific articles, 1 of them in the professional edition of Ukraine, which are included in scientometric databases [2], 4 of them in foreign publications [1, 3, 4, 5], 6 in the materials of scientific conferences [7 – 12], and in one article in another edition [6].

1. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-Wall Flows with Irregular Boundaries. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Solid Mechanics and Its Applications. Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications, vol.211, pp.115-129. Springer (2014).

2. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Theoretical models of flow control in near-wall areas in hydrodynamic systems. System research and information technology. **4**, 87-99 (2014).

3. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active near-wall flow control through a cross groove with suction. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Studies in Systems, Decision and Control. Continuous and Distributed Systems II: Theory

and Applications, vol.30, pp. 353-367. Springer (2015).

4. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Flow control near a square prism with the help of frontal flat plates. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy V.A. (eds.) Studies in Systems, Decision and Control. Advances in Dynamical Systems and Control, vol.69, pp.327-350. Springer (2016).

5. Gorban, N.V., Khomenko, O.V., Paliichuk, L.S., Tkachuk, A.M.: Long-time behavior of state functions for climate energy balance model. Discrete & Continuous Dynamical Systems - Series B. **22**(5), 1887-1897 (2017).

6. Gorban, N.V., Kapustyan, A.V., Kapustyan, E.A., Khomenko, O.V.: Strong Global Attractor for the Three-Dimensional Navier-Stokes System of Equations in Unbounded Domain of Channel Type. Problems of Control and Informatics. **6**, 67 – 77 (2015).

7. Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-Wall Flows with Irregular Boundaries. In: Abstracts of the Crimea International Mathematical Conference: Book of Abstracts. Sudak, September 22-October 4, 2013.

8. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Theoretical Models of Flow Control in Near-Wall Areas. In: Abstracts of the 16th International Scientific and Technical Conference SAIT 2014, ESC «IPSA» «NTUU» KPI, Kyiv, May 26-30, 2014.

9. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active Near-Wall Flow Control Via a Cross Groove With Suction. In: Abstracts of the Third International Conference of Memory of the Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Ukraine Valery S. Melnyk «Nonlinear Analysis and Application», ESC «IPSA» «NTUU» KPI, Kyiv, April 1-3, 2015.

10. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Flow Control Via an Interceptor and a Fluid Suction. In: Abstracts of the 17th International Scientific and Technical Conference SAIT 2015, ESC «IPSA» «NTUU» KPI, Kyiv, June 22-25, 2015.

11. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Application of the trapped vortex scheme for the flow control around the square prism. In: Abstracts of the 18th International Scientific and Technical Conference SAIT 2016, ESC «IPSA» «NTUU» KPI, Kyiv, May 30 - June 2, 2016.

12. Khomenko, O.V.: On Strong Global Attractor for the Three-Dimensional Navier-Stokes System of Equations in the Unbounded Domain of Channel Type. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, 18-23 September, 2017.

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ.....	2
ВСТУП.....	14
1. СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ ПРОБЛЕМИ КЕРУВАННЯ ПОТОКОМ В ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ.....	22
1.1. Аналіз і класифікація методів керування потоком.....	22
1.2. Проблематика моделювання та дослідження задач керування потоком	29
1.3. Висновки до розділу та постановка задач дослідження.....	36
2. ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ПОТОКОМ В ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ.....	39
2.1. Структурна схема системного підходу до розв’язання задач керування потоком.....	39
2.2. Якісний аналіз тривимірної системи рівнянь Нав’є-Стокса в каналоподібній області.....	42
2.3. Динамічна модель точкових вихорів.....	60
2.4. Задача керування в системі точкових вихорів.....	66
2.5. Висновки до розділу.....	69
3. ПОБУДОВА МОДИФІКОВАНОЇ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ СПІЙМАНОГО ВИХОРУ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО КЕРУВАННЯ ТЕЧІЄЮ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КАНАВКАХ.....	71
3.1. Алгоритм розв’язання задач керування потоками рідини.....	71
3.2. Фізичне обґрунтування проблеми керування пристінною течією поблизу нерівності.....	73
3.3. Постановка задачі керування течією в циліндричній канавці.....	75
3.4. Побудова модифікованої моделі спійманого вихору.....	78

3.5. Параметричне керування пристінною течією в канавці.....	84
3.6. Властивості спійманих вихорів у збуреному потоці.....	88
3.7. Детерміноване керування циркуляційною течією в канавці.....	97
3.8. Реактивне керування циркуляційною течією зі зворотним зв'язком.....	105
3.9. Висновки до розділу.....	108
4. ЗАДАЧА ЗМЕНШЕННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ КВАДРАТНОГО ЦИЛІНДРА	110
4.1. Постановка задачі зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра	111
4.2. Побудова і застосування модифікованої моделі спійманого вихору до розв'язання задачі керування обтіканням квадратного циліндра.....	114
4.3. Чисельне моделювання в'язкого обтікання квадратного циліндра	120
4.4. Аналіз отриманих результатів	128
4.5. Висновки до розділу.....	138
ВИСНОВКИ.....	140
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	143
ДОДАТОК А.....	158
ДОДАТОК В.....	160

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. Проблема енергозбереження є однією з найважливіших, що особливо гостро постала в останні десятиріччя в багатьох сферах діяльності людства. Зменшення гідродинамічного опору рухомих тіл являє собою один з найбільш значних резервів економії енергоресурсів в гідродинамічних системах. Одним зі шляхів підвищення енергоефективності гідродинамічних систем є керування потоком в таких системах. Під керуванням потоком [78] в науковій літературі розуміють таке перетворення (зміну) потоку, що спрямоване на досягнення необхідної мети залежно від простору та часу. Метою може бути зменшення гідродинамічного опору, підіймальної сили, інтенсифікація перемішування, покращення тепло- та масопереносу тощо. Розв'язання цих задач спрямоване на підвищення енергоефективності системи.

Вихрова структура течії, що генерується при русі тіла у воді, повітрі або в гідравлічних потоках, є головним фактором, який визначає енерговитрати, зумовлені експлуатацією технічних систем. Розробка та вдосконалення методів і способів трансформації потоку та формування необхідної структури течії в гідродинамічних системах різного типу (судна, підводні апарати, літаки, турбіни, трубопроводи, гідротехнічні споруди та ін.) продовжує залишатись однією з основних задач. Значні здобутки в даному напрямку належать таким вченим, як Gad-el-Hak M., Ringleb F.O., Bewley T.R, Cortelezzi L., Iollo A., Чернишенко С.І., Бунякін А.В., Мігай В.К. та ін. Складність таких задач зумовлена, зокрема, необхідністю дослідження рівнянь Нав'є-Стокса. Не зважаючи на значний прогрес в дослідженнях системи Нав'є-Стокса (Ладиженська О.А., Temam R., Caraballo T., Фурсіков А.В., Касьянов П.О., Капустян О.В. та ін.), багато питань залишаються невирішеними.

Область знань, в якій досліджуються способи керування потоками

рідини належить до міждисциплінарних наук, яка застосовує елементи гідромеханіки і теорії динамічних систем, теорії керування, якісний та чисельний аналіз нелінійних систем. Дослідження складних системних міждисциплінарних задач є областю інтенсивних досліджень, зокрема таких вчених, як Згуровський М.З., Панкратова Н.Д., Романенко В.Д., Бідюк П.І., Данилов В.Я та ін. Розробка схем керування течією в гідродинамічних системах різного типу потребує вивчення властивостей та глибокого розуміння процесів, що відбуваються в таких системах. Задача ціленаправленого впливу на потік з метою покращення гідродинамічних характеристик пов'язана з необхідністю дослідження систем з обтіканням. Складність вивчення течій з обтіканням пов'язана з тим, що при певних числах Рейнольдса відбувається відрив потоку від твердої поверхні, яка обтікається, що викликає нестационарність течії та утворення різноманітних вихрових структур. Дослідження в цьому напрямку зумовлені необхідністю визначення гідродинамічних навантажень та з питаннями вибору раціонального гідродинамічного компоновання апаратів з урахуванням умов роботи окремих елементів та їх взаємної інтерференції при обтіканні.

Гідродинамічні системи, як правило, описуються рівняннями в частинних похідних. Незважаючи на значний прогрес в розвитку теорії керування системами, які описуються рівняннями в частинних похідних, розв'язання задач керування такими системами є складним. Особливо це стосується задач керування течією в нетривіальних областях з високим числом Рейнольдса. Як показує практика, схеми керування потоком повинні враховувати неоднорідність середовища, наявність збурень та пульсацій, що є невід'ємними характеристиками природніх потоків. Оскільки математичні моделі таких задач базуються на рівняннях Нав'є-Стокса, побудований контролер не може забезпечити розв'язання задачі керування для реального потоку. З іншого боку, застосування простих лінійних моделей не може забезпечити бажаного результату, оскільки течії, які формуються в гідродинамічних системах, є досить складними і нестационарними. Тому

розробка нових ефективних методів та схем керування потоком на основі математичних моделей, що адекватно описують гідродинамічну систему та дозволяють розв'язувати поставлені задачі щодо формування необхідної структури потоку, є актуальною задачею.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.

Дисертаційна робота виконана в науково-дослідному відділі системної математики Навчально-наукового комплексу «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» згідно науково-дослідної теми

«Довгострокові прогнози функцій стану керованих геофізичних нелінійних систем з багатовимірними суперпотенціальними законами» (номер державної реєстрації 0112U001229, 2012-2016 рр.),

та грантів:

– гранту Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених в 2013 році №GP/F49/070 «Структурні властивості притягуючих множин деяких нелінійних крайових задач геофізики і механіки» (номер державної реєстрації 0113U006191),

– гранту Президента України докторам наук для підтримки наукових досліджень у 2014 році «Сильні розв'язки тривимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса» (номер державної реєстрації 0114U007153),

– гранту Президента України докторам наук для підтримки наукових досліджень у 2016 році «Дослідження граничних режимів в математичних моделях в'язкопружних рідин» (номер державної реєстрації 0115U005407),

– гранту на виконання проектів НДР молодих учених у 2013-2014 рр. «Довгострокові прогнози функцій стану та регулярність граничних циклів керованих процесів дифузійного типу» (номер державної реєстрації 0113U002978).

Мета і задачі дослідження. Метою роботи є розробка методів керування пристінною течією на основі властивостей спійманих вихорів,

визначення параметрів керування.

Досягнення поставленої мети вимагає розв'язання таких основних завдань:

- проаналізувати проблеми, пов'язані з дослідженням задач керування потоком, існуючі методи та способи керування потоком;
- застосувати системний підхід до розв'язання задач керування потоком;
- виконати аналіз динамічних властивостей спійманого вихору поблизу нерегулярних границь та за наявності збурень потоку;
- модифікувати та застосувати динамічну модель спійманого вихору для розв'язання задачі керування течією в циліндричних канавках;
- побудувати нелінійний контролер пристінної течії в канавці та знайти параметри керування, що забезпечують формування бажаної структури потоку;
- розв'язати задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра за допомогою модифікованої моделі спійманого вихору;
- знайти параметри керування, які дозволяють зменшити гідродинамічні навантаження квадратного циліндра;
- для перевірки ефективності розробленої схеми керування виконати чисельне моделювання в'язкого обтікання циліндра з керуючими пластинами в діапазоні середніх чисел Рейнольдса.

Об'єкт досліджень – пристінна течія в гідродинамічних системах.

Предмет досліджень – методи керування пристінною течією на основі модифікованої моделі спійманого вихору, параметричне керування обтіканням квадратного циліндра, параметри керування.

Методи дослідження. В роботі використано методи системного аналізу, методи нелінійного аналізу дослідження атракторів тривимірних систем гідродинамічного типу, що ґрунтуються на основах теорії глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем. Для дослідження течії, побудови та обґрунтування алгоритмів керування застосовуються класичні методи теорії керування нелінійними динамічними системами. Для

визначення циркуляції приєднаних вихорів при моделюванні течії поблизу квадратного циліндра застосовується метод граничних інтегральних рівнянь. Для чисельного розв'язання систем рівнянь використовується метод січних. Для розв'язання систем диференціальних рівнянь застосовується метод Рунге-Кутта четвертого порядку. Чисельне моделювання поля в'язкої течії навколо квадратного циліндра з прикріпленими фронтальними пластинами виконується за допомогою вихрового методу.

Наукова новизна одержаних результатів. Основні наукові результати, що визначають наукову новизну та виносяться на захист, є такі.

Вперше:

– запропоновано метод нелінійного керування пристінковим потоком в циліндричних канавках, який відрізняється застосуванням модифікованої моделі спійманого вихору і забезпечує необхідні вимоги до формування структури течії; встановлено нові властивості спійманих вихорів поблизу нерегулярних границь; розроблено нелінійний контролер пристінної течії, який відрізняється тим, що враховує рівняння рівноваги спійманого вихору відносно його координат, циркуляції, потужності відкачування рідини, кутової координати точки стоку та умову безвідривного обтікання кутів канавки і забезпечує активне керування зі зворотним зв'язком у нестационарному потоці;

– на основі модифікованої моделі спійманого вихору розв'язано задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра. Знайдено параметри керування обтіканням квадратного циліндра з фронтальними пластинами, що дозволяють зменшити гідродинамічні навантаження.

Отримали подальший розвиток:

методи керування пристінною течією; в роботі показано, що при розробці нових алгоритмів керування обтіканням поганообтічних тіл для мінімізації енерговитрат важливо враховувати топологічні особливості течії.

Практичне значення одержаних результатів. Розроблені методи керування потоком дозволяють суттєво зменшити гідродинамічні

навантаження, що підвищує енергоефективність гідродинамічної системи.

Розв'язано задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра. Знайдено параметри керування обтіканням квадратного циліндра з фронтальними пластинами, що дозволяють зменшити гідродинамічні навантаження. Число Струхала в керованому потоці зростає порівняно з некерованим випадком. Завдяки регуляризації сліду при керуванні зменшується середній опір і флуктуаційні сили, що діють на циліндр. Керування дозволяє знизити коефіцієнт гідродинамічного опору квадратного циліндра від 20% при $Re=100$ до 35% при $Re=500$ та зменшити амплітуду підйимальної сили на 50% – 70% залежно від числа Рейнольдса.

Одержані результати дослідження свідчать про необхідність врахування топології потоку при розробці нових алгоритмів керування течією поблизу обтічних тіл. Дисертаційне дослідження проводилось в рамках держбюджетних науково-дослідних робіт та частково підтримане грантами ДФФД та НАН України.

Результати дисертаційної роботи були впроваджені в Світовий центр даних з геоінформатики та сталого розвитку (акт впровадження № а 1801/13 від 18.01.2018). Одержані в роботі нові наукові результати використовуються при викладанні теоретичного матеріалу навчальних дисциплін «Елементи нелінійного аналізу» та «Системний аналіз стохастично розподілених процесів» в Навчально-науковому комплексі «Інститут прикладного системного аналізу» Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського».

Особистий внесок здобувача. Всі результати, що виносяться на захист, одержано автором самостійно. В роботах, написаних в співавторстві, дисертанту належить дослідження динамічних властивостей спійманого вихору поблизу нерегулярних границь [80]; побудова нелінійного контролера пристінної течії, який складається з умови рівноваги спійманого вихора та безвідривного обтікання кутів канавки; застосування розробленого контролера для розрахунку параметрів реактивної керуючої схеми зі

зворотним зв'язком у нестационарному потоці, коли система оперативно реагує на зовнішні збурення [11]; побудова активної схеми керування пристінною течією за допомогою відкачування рідини, яка ґрунтується на властивостях спійманих вихорів та спрямована на створення поблизу тіла нової топології течії зі стійкими вихорами [81]; розв'язання задачі керування обтіканням квадратного циліндра за допомогою модифікованої моделі спійманого вихору, обчислення параметрів керування [82]; розроблено та обґрунтовано схему дослідження моделі енергетичного балансу Будико-Селерса [86]; для модифікованої тривимірної системи Нав'є-Стокса в необмеженій області, що задовольняє нерівність Пуанкаре для відповідної напівгрупи встановлено існування глобального атрактора в сильній топології фазового простору, показано збіжність одержаного атрактора до множини повних обмежених траєкторій тривимірної системи Нав'є-Стокса [10]; обґрунтування алгоритмів керування пристінною течією [83]; обґрунтування та розробка активної схеми керування пристінною течією за допомогою відкачування рідини, яка ґрунтується на властивостях спійманих вихорів та спрямована на створення поблизу тіла нової топології течії зі стійкими вихорами [84]; обґрунтування та розробка методу керування пристінною течією за допомогою відкачування рідини на основі модифікованої моделі спійманого вихора [12]; розробка та обґрунтування методу керування обтіканням квадратної призми, який ґрунтується на властивостях спійманих вихорів [13].

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідались та обговорювались на :

- серії спільних наукових семінарів ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського та механіко-математичного факультету МДУ імені М.В. Ломоносова (2012, 2014, 2015);
- семінарі НДВ системної математики ННК «Інститут прикладного системного аналізу»;
- Кримській міжнародній математичній конференції «КММК-2013», Судак,

22 вересня – 4 жовтня 2013р.,

– 16-й міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології SAIT 2014», Київ, 26 – 30 травня 2014р.,

– 3-й міжнародній науковій конференції пам'яті член-кореспондента НАН України В.С. Мельника «Нелінійний аналіз та застосування», Київ, 01 – 03 квітня 2015р.,

– 17-й міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології SAIT 2015», Київ, 22 – 25 червня 2015р.,

– 18-й міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології SAIT 2016», Київ, 30 травня – 2 червня 2016р.,

– на Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю від дня народження Стефана Банаха (м. Львів, 2017 р.).

Публікації. Основні результати дисертації опубліковані в 12 наукових публікаціях: 5 наукових статтях в провідних фахових виданнях, з них 1 – у фаховому виданні України [11], що входить до наукометричних баз даних, 4 – в іноземних виданнях [80 – 82, 86], а також в 6 тезах доповідей наукових конференцій [12, 13, 83, 84, 101, 102] та в 1 статті в іншому виданні [10].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота складається з анотації, вступу, чотирьох розділів, загальних висновків, списку використаних джерел, що містить 169 найменувань, та додатків. Загальний обсяг роботи складає 162 сторінки друкованого тексту, з них 129 сторінок основного тексту, 63 рисунка, 1 таблиця.

РОЗДІЛ 1. СУЧАСНИЙ СТАН ДОСЛІДЖЕНЬ ПРОБЛЕМИ КЕРУВАННЯ ПОТОКОМ В ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

1.1. Аналіз і класифікація методів керування потоком

Під керуванням потоком в науковій літературі розуміють досягнення необхідної мети залежно від простору та часу за допомогою змін потоку [78]. Метою може бути зменшення гідродинамічного опору, збільшення (зменшення) підйимальної сили, покращення змішування, явищ тепло- та масопереносу тощо. Оскільки керування потоком дозволяє вирішити ряд прикладних задач, що виникають в гідродинамічних системах, даний напрямок є областю активних досліджень, які було розпочато ще в 1904 році Прандтлем.

Задача керування системами з обтіканням тіла є однією з найважливіших задач, що часто виникає на практиці. Експлуатація систем такого типу супроводжується вихроутворенням, що призводить до виникнення нестационарних сил, акустичних шумів і резонансу, структурних вібрацій та інших небажаних наслідків. Застосування методів керування динамікою вихорів поблизу тіл гідродинамічної системи, що обтікаються, дозволяє підвищити продуктивність обладнання і попереджає його руйнування. Проблема керування вихровою структурою потоку поблизу тіла, що обтікається, є одним з актуальних напрямів досліджень на сьогоднішній день [118].

Гідродинамічні системи часто складаються з тіл чи інженерних конструкцій необтічної форми (з гострими ребрами або зі значним від'ємним градієнтом тиску над поверхнею). Особливість вивчення таких течій полягає в тому, що при певних числах Рейнольдса відбувається відрив потоку від твердої поверхні, яка обтікається [35]. Гідродинамічні характеристики

системи з необтічним тілом визначаються вихровою структурою в області поблизу тіла, від того відривною чи безвідивною є течія. Від частоти та інтенсивності вихрових утворень залежить опір тіла, що обтікається. При відривному обтіканні поганообтічних тіл відбувається генерування вихрових структур, розміри яких співмірні з розміром тіла, що обтікається. Розуміння механізму виникнення таких вихорів має велике практичне значення для проектування технічних пристроїв. В більшості випадків явище відриву в гідродинамічних системах є причиною небажаних наслідків, таких, як збільшення опору руху рідини в трубопроводах, збільшення опору руху твердого тіла в рідині і т.д. Такі процеси призводять до значних енерговтрат. Слід відмітити, що одним з перших, хто зробив великий внесок у розуміння природи відриву є Прандтль, який у своїй роботі [140] виклав теорію примежового шару та описав фізику явища відриву потоку.

Перші розрахункові схеми відривного обтікання тіл (двовимірний струменевий потік нев'язкої рідини і газу з «мертвою» зоною за тілом) досліджувалась Кірхгофом, Релеєм, Жуковським, Чаплигінін та ін. Інша схема відривної течії нев'язкої рідини була запропонована у вихровій теорії Кармана. Вихори та вихрові відривні течії визначають природу сил, що діють на тіло, яке обтікається потоком рідини. Жуковський вперше показав вихрову природу підіймальної сили. Основоположником вихрової теорії є Гельмгольц, який в своїй роботі [89] дав кінематичне визначення вихрового руху та сформулював три закони динаміки руху вихорів. Значний вклад в розвиток вихрової динаміки вніс Кірхгоф. Вивченню вихрового руху присвячено багато робіт [44], зокрема властивості вихрового руху викладені в багатьох класичних підручниках з теоретичної динаміки [18, 112, 128, 159], монографіях [122, 130, 152].

Найбільш ранні методи керування вихроутворенням та рідинних сил обтічних тіл описані, зокрема, Zdravkovich [166]. У більшості випадків ці методи засновані на модифікації поверхні тіла. Подальший розвиток методів керування потоком призвів до створення схем, які потребують

енергопостачання із зовнішніх джерел. Методи керування потоком можна класифікувати за їх призначенням та за необхідністю енерговитрат для забезпечення функціонування системи. Аналіз досліджень в області керування потоками рідини показує, що можна виділити такі групи методів керування потоком, відповідно до задач та цілей, які вони вирішують:

- 1) зменшення опору тертя;
- 2) попередження відриву граничного шару від поверхні обтічного тіла;
- 3) збільшення або зменшення інтенсивності теплообміну між течією та поверхнею тіла, що обтікається;
- 4) формування необхідної структури течії із заданими властивостями.

Методи, за допомогою яких ці цілі можуть бути досягнуті в свою чергу можна розділити на дві категорії: пасивні і активні [119] (рис. 1.1).

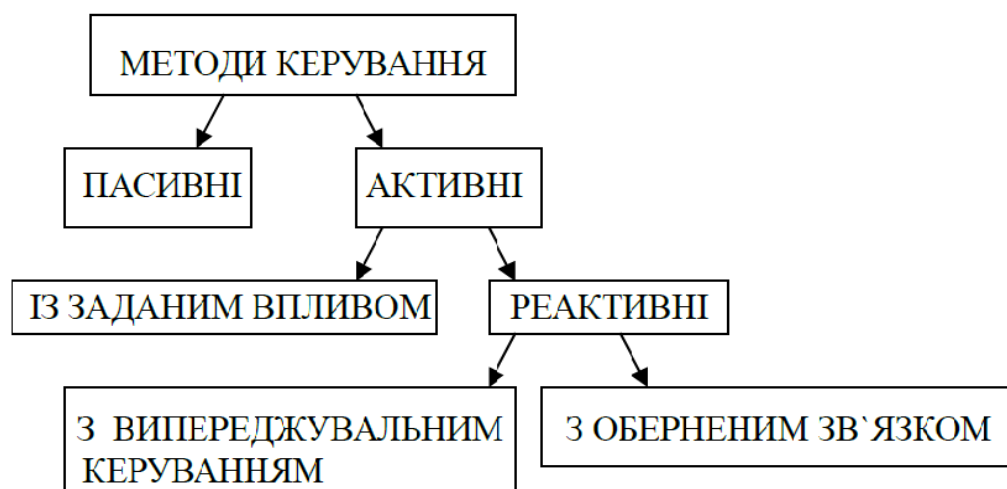


Рис. 1.1. Класифікація методів керування пристінковим потоком

В [65] методи керування класифіковано на активні зі зворотним зв'язком та без зворотнього зв'язку.

При виборі схеми керування ставиться задача досягнення поставленої мети при мінімальних затратах енергії без погіршення інших характеристик. Пасивні методи керування потоком є значно простішими, ніж активні. Перевагою пасивних методів є те, що при такому способі керування не

потребуються додаткові енерговитрати для приведення в дію керуючого пристрою. Пасивне керування полягає в перерозподілі енергії потоку шляхом зміни його структури. Недоліком пасивних методів є те, що такий спосіб керування потоком не передбачає реагування на зміни у потоці. Активні методи в свою чергу вимагають енерговитрат для приведення в дію керуючої схеми. Реактивні стратегії керування потоком є більш складними, оскільки передбачають вимірювання необхідних величин, що характеризують стан потоку. Перевагою реактивних методів керування є можливість враховувати зміни, які відбуваються в потоці.

До пасивних методів відносять, зокрема, штучну модифікацію поверхні, що обтікається, встановлення поблизу поверхні додаткових елементів, пристроїв, що руйнують великі вихори та ін. Одним з пасивних методів керування пристінною течією є використання еластичних поверхонь в гідродинамічних системах, які здатні поглинати енергію турбулентних збурень, що виникають у потоці. Механізм зниження тертя за рахунок використання податливих поверхонь полягає в тому, що така поверхня повинна взаємодіяти з граничним шаром і впливати на його розвиток, тобто вона повинна забезпечувати поглинання всіх збурень. При цьому довжина хвилі пружного покриття повинна бути того ж порядку величини, що і товщина граничного шару, в той час як амплітуда повинна мати порядок товщини в'язкого підшару. Вперше зменшення сил опору шляхом використання піддатливих покриттів було розглянуто в роботах Крамера [107-109]. Складність застосування податливих поверхонь полягає в тому, що ця задача є міждисциплінарною і вимагає одночасних зусиль в гідродинаміці, механіці деформованого твердого тіла, фізиці, хімії і технології полімерів.

Трансформація турбулентної течії в систему регулярних вихорів із заданими властивостями є однією з успішних стратегій керування пристінковими потоками рідини. Вона застосовується, зокрема, для поліпшення гідродинамічних характеристик погано обтічних тіл [79, 141, 163]. Ефективним способом генерування великомасштабних вихорів в

пристінковій області є розташування на поверхні, що обтікається, поперечних канавок, за допомогою яких завихреність з граничного шару «збирається» у циркуляційні зони. Вперше цю технологію запропонував Рінглеб для зменшення гідравлічних втрат в дифузорах [145]. Його дослідження розпочались з вивчення снігових карнизів, які утворюються на гірських вершинах, як природніх пристроїв для керування відривом потоку. Рінглебом була побудована модель спійманих вихорів для опису течії в канавках типу «сніговий карниз». Дослідження Рінглеба ґрунтувались на аналізі стаціонарних точок потоку, що дозволило визначити геометричні параметри нерівності, які забезпечують існування стійкої циркуляційної течії без підведення зовнішньої енергії.

Можливості генерування спійманих вихорів поблизу поверхонь досліджував в своїх роботах Чернишенко [59]. Різні схеми генерування спійманих вихорів та можливості їх застосувань розглядались в роботах Мігая [24, 25] та багатьох інших дослідників. Прикладом реалізації концепції спійманих вихорів в аеродинаміці є крило Каспера, що застосовується для збільшення підйімальної сили літальних апаратів. Зокрема, в роботі [163] досліджено формування заглиблення на поверхні крила, як один зі способів забезпечення більш стійкої вихрової конфігурації. Ідея застосування спійманих вихорів була застосована для розв'язання ряду теоретичних та практичних задач. Зокрема, в роботі [75] вивчено можливості стабілізації вихорів, що утворюються в канавках типу «сніговий карниз» та запропоновано схему керування потоком за допомогою відбору (вдуву) рідини. В роботі [144] досліджуються можливості збільшення підйімальної сили та аеродинамічного зменшення опору за допомогою спійманого вихору з використанням відкачування рідини. Запропонований алгоритм передбачає стабілізацію вихору шляхом мінімізації його швидкості. Клас поверхонь, поблизу яких можливе створення стійких областей завихреності, розширює теоретична модель спійманих вихорів в канавках, запропонована в роботі [53].

Один з методів керування пристінною течією, запропонований в багатьох роботах, полягає у створенні на поверхні тіла, що обтікається, поздовжніх канавок (ріблетів). Це викликає збільшення сил в'язкості, які діють в поперечному напрямку, що породжує відносно спокійний плин в западинах між ребрами, який виштовхує вгору турбулентну течію, що обумовлює поверхневе тертя. При цьому змінюється процес генерування витягнутих пристінкових турбулентних утворень. Дослідження в цьому напрямі проводились, зокрема, в NASA. В роботах [160, 161] було досліджено близько сорока варіантів поверхонь з різним профілем ребра. Основним недоліком застосування даного методу є те, що ріблети можуть забруднюватись пилом та дрібними частинками.

Випробуваним методом керування пристінним потоком є зміна градієнту тиску. Створення на поверхні обтічного тіла додатнього градієнта тиску в поздовжньому напрямку призводить до то гальмування потоку поблизу стінки, внаслідок чого поверхневе тертя зменшується. В роботі [52] показано, що при забезпеченні умов, близьких до зриву, використання даного методу може зменшити опір приблизно на 10 %.

До активних методів керування пристінними потоками відносяться: відкачування або вприскування рідини, дотичний видув струменя поблизу поверхні обтічного тіла, нагрівання або охолодження поверхні, що спричиняє зміни в'язкості та градієнту щільності, введення в пристінковий потік різноманітних добавок, таких як полімери, мікробульбашки, частинки речовини та ін. В роботах [9, 17] описано активний метод керування шляхом акустичного впливу на пристінковий потік, що сприяє інтенсифікації переносу кількості руху. Метод керування потоком за допомогою вдуву мас газу або рідини розглядається, зокрема, в роботі [91]. Вприскування рідини, наприклад, через щілину по дотичній до поверхні, дозволяє зменшити швидкість вихідного потоку поблизу стінки на деякій ділянці вниз за течією і тим самим зменшити поверхневе тертя. Регулюючи співвідношення між швидкістю потоку, що набігає і швидкістю вдуву, можна наблизитися до

зривного режиму течії з малим поверхневим тертям або запобігти зриву потоку. Основною проблемою при застосуванні цього методу є вибір джерела, що має низькі витрати на вході. Проте, існують кілька джерел, що характеризуються низькими втратами, наприклад, відсмоктування граничного шару для ламінаризації обтікання, пасивний злив повітря при управлінні відривом та ін. Даний метод пов'язаний з активним перерозподілом речовини, яка або відбирається з потоку, що набігає, або збирається, що вимагає відповідної зміни конструкції апарату.

Ще один ефективний метод керування – введення в потік рідини декількох типів чужорідних субстанцій. Аналіз робіт в цьому напрямку показує, що в основному застосовуються три типи добавок: розчини полімерів, мікробульбашки газу і мікрочастинки. Введення розчинів довголанцюгових полімерних молекул в примежовий шар водного потоку застосовується для зменшення опору тертя [68, 110, 121]. Основний недолік такого способу керування полягає в тому, що добавки, що вводяться, можуть змінювати свої властивості протягом певного часового періоду. Проте, дослідження показують, що полімерні добавки так чи інакше послаблюють процес виникнення турбулентності в пристінній області течії. Оскільки полімери змінюють свої властивості, було запропоновано вводити в пристінковий потік поверхнево-активні речовини, молекули яких здатні з усього об'єму або колоїдного розчину концентруватись на границі поділу фаз (між рідиною та газом, рідиною та рідиною або між рідиною та твердим тілом) зі зниженням вільної поверхневої енергії (поверхневого натягу). Основна перевага такого роду домішок полягає в тому, що вони зберігають свої властивості протягом довгого часового періоду.

Для зниження опору тертя також застосовують мікробульбашки газу, що вводяться в примежовий шар [99, 123, 127]. Цей метод полягає в створенні газового шару між поверхнею і рідиною. Оскільки щільність і в'язкість в такому газовому шарі істотно менша, то можна досягти значного зменшення локального опору. Основні труднощі цього способу керування

пов'язані з нестійкістю газового прошарку, обумовленого не тільки розмірами бульбашок, а і їх плавучістю, оскільки межа між газом і повітрям є дуже нестійкою. Щоб стабілізувати цю межу, бульбашки повинні бути дуже маленькими, але не настільки, щоб викликати ефект шорсткості, коли вони покривають поверхню нерівномірно. В процесі експериментів встановлено також, що мікропухирці найбільш ефективні, коли розташовуються в буферній області турбулентного примежового шару.

1.2. Проблематика моделювання та дослідження задач керування потоком

Розробка схем керування потоком потребує вивчення та глибокого розуміння явищ і процесів, що відбуваються в гідродинамічних системах.

Гідродинамічні системи, як правило, описуються еволюційними рівняннями в частинних похідних і мають нескінченновимірний фазовий простір. Якісне вивчення таких моделей є досить складним. В сучасній науковій літературі якісні дослідження цих систем зводяться до вивчення їх розв'язків на великих інтервалах часу за умови, що час прямує до нескінченності. При цьому досліджується існування та властивості інваріантної підмножини фазового простору, яка рівномірно притягує всі траєкторії системи – глобального атрактора [56, 97, 98, 155]. Глобальний атрактор за умов його існування описує всю нетривіальну динаміку гідродинамічної системи.

Вивчення тривимірної системи Нав'є-Стокса займає особливе місце серед задач такого типу [31]. Вона належить до так званого класу «некоректних» рівнянь математичної фізики, для яких властивість єдиності або не виконується або не доведена. Доведення або спростування існування глобального гладкого розв'язку задачі Коші для тривимірних рівнянь Нав'є-Стокса є однією з так званих «проблем тисячоліття», визначених

Математичним інститутом Клея у 2000 році. Пошук аналітичного розв'язку системи Нав'є-Стокса для просторового або плоского випадку є складним, оскільки система нелінійна та має місце сильна залежність від початкових і граничних умов. На даний час для тривимірної системи Нав'є-Стокса в роботах Лере і Хопфа доведено лише існування глобальних слабких розв'язків, але єдиність розв'язку задачі Коші не встановлено.

Перші дослідження щодо глобального атратора двовимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса були проведені О.А. Ладиженською [20]. Починаючи з робіт Ладиженської [19], вивчення рівнянь Нав'є-Стокса є областю інтенсивних досліджень [33]. В даному напрямку проводились дослідження як у випадку обмеженої області [155], так і в необмежених областях [148]. Однак на сьогоднішній день для тривимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса відомі результати лише в слабкій топології фазового простору [58, 94, 95].

Один з методів вивчення даної проблеми полягає в аналізі різноманітних модифікацій системи з подальшим граничним переходом [64]. Одна з таких модифікацій, що співпадає з немодифікованою 3D системою Нав'є-Стокса при обмежених градієнтах швидкостей, вперше запропонована в [55]. В [55] задача була розглянута в обмеженій області, де для досліджуваної системи було доведено існування глобального атратора відповідної напівгрупи в сильній топології, а також показана його збіжність до множини обмежених повних траєкторій немодифікованої системи. Слід відзначити, що в [93] була розглянута система Бенара з модифікацією в необмеженій області. Однак результати [93] гарантують лише потраєкторне притягування в слабкій топології фазового простору.

Оскільки якісні дослідження гідродинамічних систем є досить складними, для їх вивчення застосовують чисельні методи. Чисельні методи, що застосовуються для дослідження математичних моделей гідродинамічних систем можна поділити на два класи: сіткові та несіткові (вихрові). Аналіз наукової літератури показує, що сіткові методи досить часто використовуються для розв'язання широкого кола задач. Проте, ці методи

мають ряд недоліків, зокрема, досить великі затрати часу для проведення обчислень, складності при моделюванні зовнішнього обтікання у випадку безграничної області течії. Безсіткові лагранжові вихрові методи є альтернативою сітковим методам.

В основі вихрових методів [67], що базуються на лагранжовому описі руху рідини, неперервне поле завихреності в області течії при розрахунках замінюється великою кількістю вихрових елементів, що рухаються за певним законом в результаті їх взаємодії. Вихрові моделі використовуються при розв'язанні широкого спектру прикладних задач. Вперше вихровий метод був використаний в роботі Розенхеда [147] для моделювання динаміки тангенціального розриву. Інтенсивний розвиток та застосування вихрових методів розпочалось в шістдесятих роках минулого століття. Об'єктом досліджень в переважній більшості робіт було відривне обтікання двовимірного контура з фіксованими точками відриву. В подальшому вихрові методи застосовувались для дослідження тривимірних задач відривного обтікання. Робота Онзагера [136] була основою для розвитку підходів, які передбачають застосування вихрових моделей для моделювання когерентних структур в турбулентних 2D потоках [63]. Вихрові моделі застосовуються також в області геофізичної динаміки рідини [124], для моделювання рециркуляційних зон при обтіканні [144] та ін.

При реалізації чисельних схем вихідна система рівнянь Нав'є-Стокса записується або в змінних швидкість-тиск, або в змінних вихор-функція течії, або швидкість-завихреність. На даний час для чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса використовуються кілька десятків різновидів різницевих схем. Більшість з них розроблена для системи рівнянь в змінних вихор-функція течії [30]. В цьому випадку передбачається використання граничної умови для вихору на твердій поверхні. Такою умовою, зокрема, є умова Тома, яка є умовою першого порядку точності щодо кроку сітки. Одним з недоліків використання змінних вихор-функція течії є неможливість застосування цього методу для тривимірних і турбулентних течій.

Альтернативою є запис та розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса в змінних швидкість-тиск, що дозволяє розв'язання за єдиним алгоритмом 2D та 3D задачі. Недоліком такого підходу є те, що розрахунок поля тиску, узгоджений з полем швидкостей, є досить складним.

Для коректного моделювання течій з урахуванням параболо-еліптичної природи системи Нав'є-Стокса використовують еліптичне рівняння Пуассона для тиску. При чисельному моделюванні гідродинамічних систем з обтіканням нескінченна область моделюється як скінчена, що ускладнює виконання граничних умов на нескінченності. Однією з особливостей системи Нав'є-Стокса, є те, що при великих числах Рейнольдса відбувається перехід в турбулентний режим. Це зумовлено як наявністю малого параметра при старшій похідній, так і нелінійністю та еліптичністю рівнянь Нав'є-Стокса.

Більшість ефективних чисельних методів розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса заснована на використанні асимптотичного методу встановлення, коли для сталих течій розв'язується нестационарна задача.

Один з перших методів, так званий метод «штучної стисливості», розроблений для системи в змінних швидкість-тиск, був запропонований Чорінім в роботах [61, 62]. Серед методів, який широко застосовується в наукових дослідженнях, є метод «змінних напрямків», розроблений Douglas, Peaceman, Rachford [139], який полягає у зведенні багатовимірної задачі до послідовності одновимірних задач з тридіагональними матрицями. Ще один з методів запропонований в роботах Харлоу [34], особливість якого в тому, що рівняння Нав'є-Стокса записуються в змінних швидкість-тиск, а для побудови різницевої схеми використовується рознесена сітка [4, 28]. Досить відомий метод в науковій літературі, є метод розщеплення по фізичних процесах Білоцерківського [23], [4]. В роботі [3] на основі ідей Харлоу був запропонований метод «великих частинок». Для розв'язання багатьох прикладних задач часто застосовуються двокрокова схема Лакса-Вендрофа і Мак-Кормака [29], яка полягає у використанні схеми «предиктор-коректор».

Роботи С.Патанкар і П.Сполдинга [27, 137] присвячені розробці так званих SIMPLE методів.

Протягом останніх десятиліть стан обчислювальної динаміки рідини та методи керування досягли значного прогресу, що дозволило вирішувати нові реальні задачі керування потоком [37, 51, 88, 103]. На даному етапі продовжується пошук ефективних різницевих схем і алгоритмів розв'язання руху в'язкої нестисливої рідини. Якість нових розроблених методів визначається шляхом порівняння результатів розрахунків з іншими відомими розрахунковими і експериментальними даними. Сучасний розвиток чисельних методів пов'язаний з удосконаленням моделей течії, процесів перемішування і комп'ютерних технологій інтегрування вихідних рівнянь.

Не зважаючи на значний прогрес в розвитку чисельних методів та теорії керування нескінченновимірними системами, які описуються рівняннями в частинних похідних [114, 165] розв'язання задач, які використовують моделі, що базуються на таких рівняннях, на даний час залишається досить складним. Ця складність здебільшого пов'язана з необхідністю виконання великої кількості обчислень, для яких недостатньо обчислювальних потужностей. Особливо це стосується задач керування потоком в нетривіальних областях з високим числом Рейнольдса. В таких задачах побудований контролер не може забезпечити розв'язання задачі керування для реального потоку.

При розв'язуванні більшості задач для отримання чисельного або аналітичного розв'язку спрощують або ж рівняння, що описують задачу або гідродинамічну модель. [38, 41, 42, 46, 47, 54, 104, 131, 150, 151]. Зокрема, застосовуються підходи, які дозволяють зменшити число ступенів вільності розглядуваної системи. Підхід, що ґрунтується на спрощенні математичної моделі задачі, передбачає нехтування ефектами, які є несуттєвими для конкретної задачі. Наприклад, нехтування в'язкої дифузії дозволяє використовувати рівняння Ейлера замість рівняння Нав'є-Стокса. Перевагою спрощеної моделі є можливість реалізовувати швидкі чисельні алгоритми, які

необхідні для управління реальним потоком. Побудова адекватної моделі при розв'язуванні задачі є одним з її найважливіших етапів. Так, спрощення моделі полегшує висновок контролера, але це може призвести до неможливості вирішення задачі керування для реального потоку.

Аналіз наукових праць показує, що при розробці методів керування потоком набули розвитку підходи, які використовують спрощену модель, що відображає динамічні властивості потоку [87, 143]. Прикладом таких моделей є нев'язка модель точкових вихорів, в якій поле завихреності представляється дискретною множиною перпендикулярних до площини потоку ізольованих сингулярних відрізків [7]. Перевагою подібних моделей є те, що для дослідження можна використовувати динамічний системний аналіз. Аналіз фазового простору системи надає інформацію про нерухомі точки, граничні цикли, точки біфуркації та інші характеристики потоку і, отже, надає інформацію про ефективність і надійність контролера. Такі моделі дозволяють розробити швидкі чисельні алгоритми, які необхідні для керування реальним потоком. Дослідження показують ефективність алгоритмів керування, що базуються на аналізі топологічної інформації, яка отримується з динамічного аналізу поля течії [87, 100, 143]. Сучасні підходи в області керування пристінними течіями спрямовані на створення необхідної топології потоку, яка дає можливість досягнення цілей задачі керування з мінімальними затратами енергії.

Застосування нев'язкої моделі точкових вихорів дозволило одержати низку важливих результатів щодо поведінки когерентних структур в турбулентних потоках [63] а також в галузі керування потоками рідини [143]. Приклади течій, для яких результати розрахунків з використанням ідеалізованої моделі точкових вихорів є дуже близькими до експериментальних даних, наведені в [125]. Зокрема, використовуючи апроксимацію точковим вихором, в роботі [76] розглянуто три моделі, що моделюють потік поблизу поверхні «сніговий карниз», крило з заглибленням і потік поза плоскою пластиною та вивчено можливості керування потоком.

В роботах Л. Кортелезі [65, 66] вивчається можливість активного керування потоком при обтіканні пластини за допомогою відбору рідини з використанням моделі точкових вихорів. Дослідження показують, що використання спрощеної моделі є оптимальним для отримання бажаної стратегії керування.

Аналіз робіт, присвячених дослідженню відривних течій показує, що вивчення таких течій проводять на прикладах двовимірних задач зовнішнього обтікання циліндрів з різноманітною формою поперечного перетину (квадратною, прямокутною, круговою). Вивченню такого класу течій присвячена значна кількість теоретичних та експериментальних робіт [2, 5, 48, 105, 158].

Більшість схем керування, як активних, так і пасивних, розглядають потік поблизу кругового циліндра, який є однією з поширених базових конфігурацій поганообтічних тіл. Аналіз наукових праць показує, що характер обтікання циліндрів з квадратною та прямокутною формою поперечного перерізу відрізняється від обтікання кругового циліндра. Керування потоком поблизу квадратного циліндра може відрізнятися, оскільки в цьому випадку наявні фіксовані точки відриву потоку.

В багатьох роботах вивчення обтікання квадратного циліндра [48, 158] проводиться при великих числах Рейнольдса, що є актуальним для більшості прикладних задач. Проведені дослідження показують, що при обтіканні кругового циліндра його гідродинамічні характеристики та характер обтікання значно більше залежить від числа Рейнольдса, ніж при обтіканні квадратного циліндра. Це зумовлюється тим, що частота зриву вихорів з ребер кругового циліндра є приблизно сталою. Робота Лайтхіла [113] є одним з найбільш ранніх чисельних досліджень течії за квадратним циліндром. В роботі для моделювання течії були використані рівняння Нав'є-Стокса в змінних завихреність-швидкість, що дає можливість зведення задачі до розв'язання інтегральних рівнянь для швидкості та завихреності [162]. Прикладами іншого підходу до розв'язання таких задач є роботи [5, 15, 22,

129], в яких застосовується дискретно-вихровий метод.

Для керування потоком поблизу циліндра можуть застосовуватись як активні так і пасивні схеми. В роботі [120] описані експериментальні дослідження активного керування потоком поблизу квадратного циліндра із заокругленим переднім краєм. Аналіз показує, що для ефективного керування не потребується будь-який вплив на примежовий шар тіла з метою запобігання відриву потоку. Керування має бути застосоване безпосередньо до сліду тіла. Один з найбільш відомих методів керування слідом квадратного циліндра передбачає використання роздільних пластин [40, 156], установку невеликого елемента, наприклад у вигляді плоскої пластини або стрижня на не фронтальній стороні циліндра [73, 169] і пристрою відкачування рідини (вприскування) [39, 49, 77]. Це дозволяє змінити вихрову динаміку сліду в результаті чого рідинні сили, що діють на квадратний циліндр, зменшуються. Слід зазначити, що оптимальне керування в цих дослідженнях отримане шляхом систематичної зміни параметрів пропонуваніх пристроїв, що вимагає багато часу. Щоб подолати ці труднощі, може бути застосована теорія керування, заснована на строгому математичному апараті. Дослідження, проведені в роботах [65, 142, 143] показують, що алгоритми керування зі зворотним зв'язком на основі методів математичного аналізу, теорії оптимального керування, теорії динамічних систем, дозволяють ефективно керувати сильно нелінійними потоками, що генеруються погано обтічним тілом в гідродинамічних системах.

1.3. Висновки до розділу та постановка задач дослідження

Проведений огляд наукових праць показує, що задачі керування потоками рідини належать до складних міждисциплінарних задач, розв'язання яких передбачає застосування елементів гідромеханіки і теорії керування динамічними системами, якісний аналіз рівнянь Нав'є-Стокса та

чисельні методи. Проведений аналіз показав необхідність застосування системного підходу до розв'язання задач керування потоком.

Схеми керування потоком повинні враховувати неоднорідність середовища, наявність збурень та пульсацій, що є невід'ємними характеристиками природніх потоків. Оскільки математичні моделі таких задач базуються на рівняннях Нав'є-Стокса, побудований контролер не може забезпечити розв'язання задачі керування для реального потоку. З іншого боку, застосування простих лінійних моделей не може забезпечити бажаного результату, оскільки течії, які формуються в гідродинамічних системах, є досить складними і нестационарними. Тому розробка нових ефективних методів керування потоком на основі математичних моделей, що адекватно описують гідродинамічну систему та дозволяють розв'язувати поставлені задачі щодо формування необхідної структури потоку, є актуальною задачею.

З аналізу основної проблематики при розробці нових схем керування пристінною течією впливають основні завдання даного дослідження:

- застосувати системний підхід до розв'язання задач керування потоком;
- виконати аналіз динамічних властивостей спійманого вихору поблизу нерегулярних границь та за наявності збурень потоку,
- модифікувати та застосувати динамічну модель спійманого вихору для розв'язання задачі керування течією в циліндричних канавках;
- побудувати нелінійний контролер пристінної течії в канавці та знайти параметри керування, що забезпечують формування необхідної структури потоку;
- розв'язати задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра за допомогою модифікованої моделі спійманого вихору;
- знайти параметри керування, які дозволяють зменшити гідродинамічні навантаження квадратного циліндра;

– для перевірки ефективності розробленої схеми керування виконати чисельне моделювання в'язкого обтікання циліндра з керуючими пластинами в діапазоні середніх чисел Рейнольдса.

РОЗДІЛ 2. ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ ПОТОКОМ В ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИСТЕМАХ

2.1. Структурна схема системного підходу до розв'язання задач керування потоком

Область знань, в якій досліджуються способи керування потоками рідини належить до міждисциплінарних наук, яка застосовує елементи гідромеханіки і теорії динамічних систем, якісний аналіз рівнянь Нав'є-Стокса та чисельні методи. Вона ґрунтується на досягненнях сучасної теорії керування динамічними системами, основи якої були закладені в роботах Р. Калмана [92]. Згідно цієї теорії, зв'язок між інформацією на вході і вихідними даними для скінченновимірної системи, до якої прикладена керуюча дія, описується наступними рівняннями:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \quad (2.2)$$

де вектор $\mathbf{X}(t)$ характеризує стан системи, $\mathbf{Y}(t)$ – вектор вимірюваних даних, $\mathbf{U}(t)$ визначає вплив керування, матриці \mathbf{A} , \mathbf{B} і \mathbf{C} описують зв'язок між елементами динамічної системи. Тоді задачу керування можна сформулювати наступним чином.

Для заданих початкового $\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}(0)$ та вихідного $\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}(t)$ станів динамічної системи визначити функцію \mathbf{U} , під впливом якої протягом часового інтервалу $[0, T]$ система переходить від стану \mathbf{X}_1 до стану \mathbf{X}_2 .

З цієї точки зору керування гідромеханічними системами означає застосування механізмів впливу, які дозволили б одержати потік із бажаними

властивостями. При цьому треба враховувати, що задачі керування потоками рідини характеризуються неоднозначністю та суперечливістю вимог щодо гідродинамічної системи, суперечливістю цілей та неоднозначністю умов її функціонування [16]. Тому, першим кроком при їх розв'язанні має бути чітке визначення мети керування (зменшення опору, підйимальної сили, інтенсифікація перемішування та ін.), а також формулювання критерію щодо властивостей гідродинамічної течії.

Системний підхід відіграє важливу роль в розв'язанні подібних складних практичних задач. На рис. 2.1 представлено структурну схему системного підходу до керування потоками рідини.

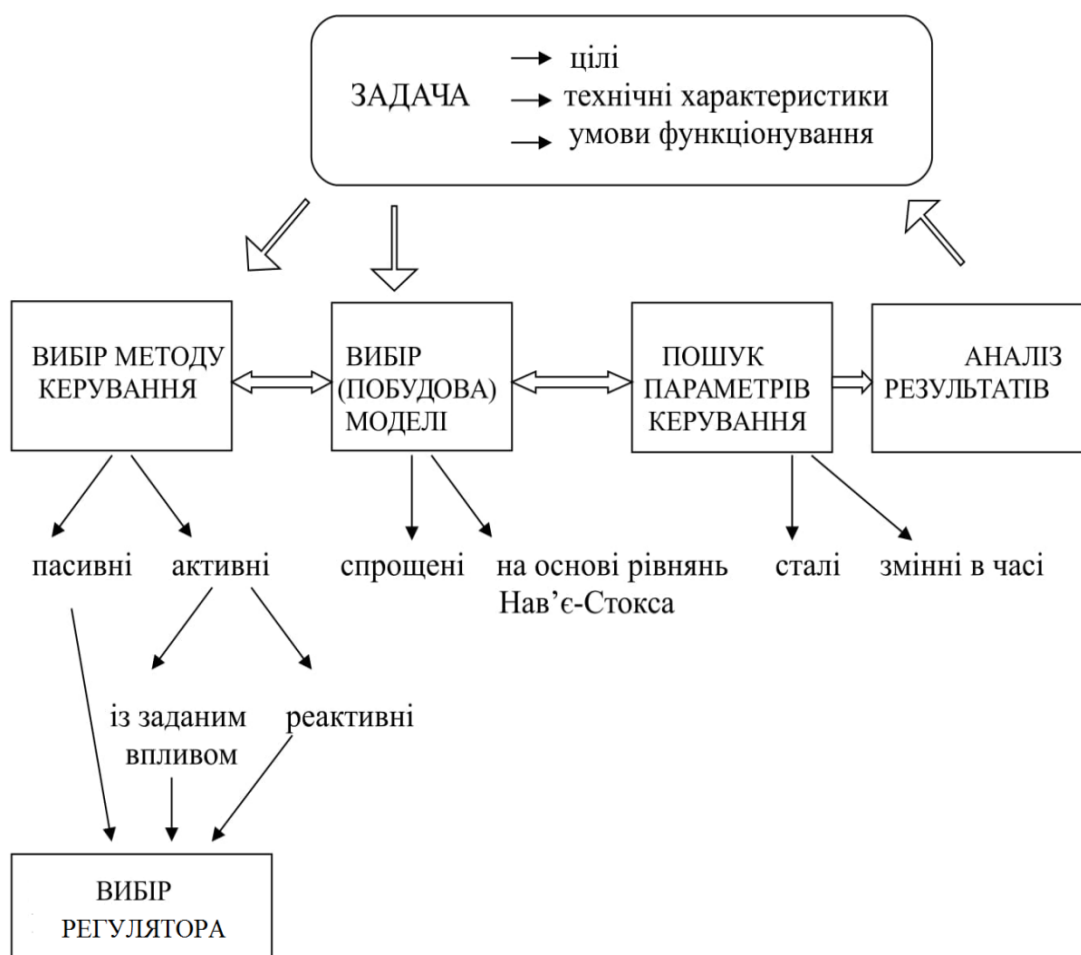


Рис. 2.1. Структурна схема системного підходу до розв'язання задач керування потоком

Складові схеми пов'язані між собою. Умови задачі визначають вибір методу керування, який дозволяє створити і підтримувати необхідну структуру течії. Від вибору методу керування та регулятора залежатиме конфігурація системи. Докладний огляд методів, що застосовуються для управління потоками рідини, викладений в монографії [78]. Як вже відмічалось в першому розділі, з точки зору енерговитрат, вони розділяються на такі, що використовують пасивну або активну стратегії керування потоками рідини. В першому випадку бажаний результат досягається без залучення зовнішньої енергії, коли необхідна структура течії генерується внесенням в систему додаткових елементів. Наприклад, коли змінюється форма тіла, що обтікається, або за допомогою малих елементів, які встановлюються перед тілом, створюється гідродинамічна тінь [106]. В цьому випадку проблема керування зводиться до визначення геометричних параметрів керуючого пристрою. При активному керуванні (з підводом енергії) формується керуючий цикл, який може бути відкритим або замкненим. У відкритому циклі активна дія задається наперед і не змінюється протягом усього процесу. Замкнений цикл передбачає зворотній зв'язок між керуючим пристроєм та потоком, що включає аналіз структури течії та відповідну зміну параметрів керування. Вибір методу керування (активного чи пасивного) також зумовлений умовами, в яких буде функціонувати гідродинамічна система, що розглядається. Слід враховувати те, що пасивні методи не потребують додаткових енерговитрат, але при такому впливі на течію не враховуються зміни потоку. Тому аналіз умов функціонування системи є одним з визначальних факторів при виборі методу керування. Оскільки активні методи потребують енергії для приведення в дію керуючої схеми, необхідно враховувати доцільність їх застосування. За наявності збурень течії необхідно застосувати реактивні методи, щоб забезпечити здатність контролера реагувати на зміни потоку.

При теоретичному обґрунтуванні керуючих схем важливу роль має

вибір математичної моделі для опису течії, оскільки від неї залежить ефективність побудованого контролера. Керуючі схеми, які використовують модель в'язкої рідини, є дуже складними, оскільки повинні ґрунтуватися на розв'язанні рівнянь Нав'є-Стокса і враховувати інформацію про велику кількість фізичних параметрів. Незважаючи на стрімкий розвиток обчислювальної техніки, практична реалізація таких контролерів навіть у двовимірному наближенні все ще залишається проблематичною. З іншого боку, застосування простих лінійних моделей не може забезпечити бажаного результату через те, що течії, які формуються навколо реальних гідродинамічних систем, є занадто складними і нестационарними. Як розумний компроміс, можуть розглядатися модель ідеальної рідини і рівняння Ейлера.

Важливу роль відіграє те, що слабким розв'язком двовимірних рівнянь Ейлера є точковий вихор [7], який представляє собою сингулярний елемент, що обертається, та рухається за траєкторіями частинок рідини. Тоді дослідження течії зводиться до моделювання динаміки скінченновимірної системи точкових вихорів, а для побудови та обґрунтування алгоритмів управління можуть застосовуватися результати теорії нелінійних динамічних систем, зокрема, рівняння (2.1) – (2.2). Сучасні підходи у цій галузі пов'язані зі створенням необхідної топології потоку, при якій бажаний результат щодо структури течії буде досягатися з мінімальними енергетичними витратами [87, 143].

2.2. Якісний аналіз тривимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса в каналоподібній області

Побудова схем керування потоком потребує вивчення процесів та властивостей гідродинамічної системи. Течія в'язкої рідини описується рівняннями Нав'є-Стокса, дослідження яких, як вже відзначалось, є досить

складним. Один з підходів якісного дослідження подібних складних еволюційних систем полягає у вивченні їх розв'язків на великих інтервалах часу за умови, що час прямує до нескінченності. При цьому довгострокову поведінку розв'язків можна описувати за допомогою скінченновимірних глобальних атракторів [1, 86, 97, 98, 111, 155]. При застосуванні методів теорії глобальних атракторів динамічну систему прийнято задавати у вигляді пари $(H, \{S(t)\})$, що складається з фазового простору H та діючої на ньому напівгрупи операторів $\{S(t): H \rightarrow H\}$. Зазвичай передбачається, що фазовий простір є повним метричним або банаховим простором, який може мати скінчену чи нескінчену розмірність. Оператори $\{S(t), t \geq 0\}$ утворюють напівгрупу.

Сімейство відображень $\{S(t): H \rightarrow H\}$, що залежить від дійсного параметра $t \geq 0$ називається напівгрупою, якщо воно задовольняє співвідношення $S(0) = Id$, $S(t_1)S(t_2) = S(t_1 + t_2)$, $\forall t_1, t_2 \geq 0$, де Id – тотожний оператор ([56]). В додатках до еволюційних рівнянь виду

$$\partial_t u = -F(u), \quad (2.3)$$

де $F(u)$ – деякий нелінійний диференціальний оператор, динамічну систему можна побудувати, доповнюючи рівняння 2.3 початковою умовою

$$u|_{t=0} = u_0, u_0 \in E, \quad (2.4)$$

де u_0 – довільний елемент з деякого простору E . Нехай для будь-якого $u_0 \in E$ задача Коші (2.3), (2.4) має єдиний розв'язок $u(t)$, $t \geq 0$, причому $u(t) \in E$ для всіх $t \geq 0$. Тоді будуть однозначно визначені оператори зсуву вздовж розв'язків рівняння 2.3:

$$S(t)u_0 := u(t), t \geq 0, \quad (2.5)$$

де $u(t), t \geq 0$ – розв’язок задачі (2.3), (2.4) з початковою умовою u_0 . Пара $(E, \{S(t)\})$ утворює динамічну систему.

Для опису загальної динамічної системи $(H, \{S(t)\})$ застосовують поняття глобального атрактора. Множину $A \in H$ називають глобальним аттрактором напівгрупи $\{S(t)\}$, якщо виконуються такі умови:

- 1) множина A компактна в H ;
- 2) A є притягуючою множиною для $\{S(t)\}$, тобто для довільної $B \subset H$ $\text{dist}(S(t)B, A) \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$;
- 3) A є строго інваріантною відносно $\{S(t)\}$, тобто $S(t)A = A \quad \forall t \geq 0$.

Глобальний аттрактор за умов його існування описує всю нетривіальну динаміку досліджуваної системи.

Розглянемо поведінку розв’язків системи рівнянь Нав’є-Стокса в області $\Omega \in \mathbb{R}^3$, що задовольняє нерівність Пуанкаре:

$$\exists \lambda_1 > 0: \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \quad \int_{\Omega} \varphi^2(x) dx \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\Omega} \|\nabla \varphi\|^2(x) dx.$$

Покладемо

$$V = \{u \in (C_0^\infty(\Omega))^3 \mid \text{div} u = 0\}; H = cl_{(L^2(\Omega))^3} V, V = cl_{(H_0^1(\Omega))^3} V.$$

Тоді H та V – гільбертові простори зі скалярними добутками і нормами:

$$\forall u, v \in H \quad (u, v) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} u_i(x) v_i(x) dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

$$\forall u, v \in V \quad (u, v)_1 = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \frac{\partial u_i(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v_i(x)}{\partial x_j} dx, \quad \|u\|_1 = \sqrt{(u, u)_1}.$$

Тоді вкладення $V \subset H \subset V^*$ є щільним та неперервним і, крім того, виконується нерівність Пуанкаре:

$$\forall u \in V \quad \|u\|^2 \leq \frac{1}{\lambda_1} \|u\|_1^2.$$

В циліндрі $(0, T) \times \Omega$ розглянемо задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + F_N(\|u\|_1)(u \nabla) u = f - \nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

де $\nu > 0$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ – задані, $u \nabla = \sum_{i=1}^3 u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, модифікуючий множник

$F_N : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ для кожного $N \geq 1$ задається рівністю:

$$F_N(r) = \begin{cases} 1, & r = 0, \\ \min\{1, \frac{N}{r}\}, & r > 0. \end{cases}$$

Розглянемо слабку постановку задачі (2.6): знайти такий елемент $u = u(t, x)$, що:

$$u \in W_T = L^2(0, T; V) \bigcap L^\infty(0, T; H);$$

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu(u, v)_1 + b_N(u, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V, \quad (2.7)$$

де $b_N(u, v, w) = F_N(\|v\|_1)b(u, v, w)$, трилінійна неперервна форма $b: V \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ задається рівністю:

$$b(u, v, w) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} w_j dx$$

Покажемо, що $\forall u_0 \in H$ задача (2.7) має єдиний розв'язок u , для якого $u(0) = u_0$. Продовживши цей розв'язок на $(0, +\infty)$, отримаємо коректно визначену напівгрупу $\{S(t): H \rightarrow H\}_{t \geq 0}$:

$$S(t)u_0 = u(t), \quad u(0) = u_0, \quad (2.8)$$

де $u(\cdot)$ – розв'язок (2.7).

Встановимо існування зв'язного глобального атрактора $A = A(N)$ для напівгрупи (2.8) та збіжності $A(N)$ при $N \rightarrow \infty$ до множини повних обмежених траєкторій 3D системи Нав'є-Стокса.

В подальшому розглядатимемо еквівалентну (2.7) операторну постановку задачі в просторі V^* :

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + B_N(u, u) = f, \quad (2.9)$$

де $A: V \rightarrow V^*$ – оператор Стокса, оператор $B_N: V \times V \rightarrow V^*$ задається рівністю:

$$\langle B_N(u, v), w \rangle = b_N(u, v, w),$$

і при цьому виконується нерівність:

$$\|B_N(u, v)\|_{V^*} \leq N \cdot c \cdot \|u\|_1. \quad (2.10)$$

В силу (2.10) довільний розв'язок задачі (2.7) належить класу

$$W(0, T) = \left\{ u \in L_2(0, T; V) : \frac{du}{dt} \in L_2(0, T; V^*) \right\}.$$

Покажемо, що для довільного $u_0 \in H$ існує єдиний розв'язок (2.7), для якого $u(0) = u_0$.

Для цього використаємо схему, запропоновану в [155]. Нехай $\{w_i\}_{i \geq 1} \subset V$ – система лінійно незалежних елементів. Кожен наближений розв'язок $u^n(t, x) = \sum_{i=1}^n e_{in}(t) w_i$ задовольняє систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$\left(\frac{du^n}{dt}, w_j \right) + \nu(u^n, w_j)_1 + b_N(u^n, u^n, w_j) = (f, w_j), j = \overline{1, n} \quad (2.11)$$

з початковою умовою

$$u^n(0) = u_0^n \rightarrow u_0 \quad (2.12)$$

в просторі H .

Для кожного $n \geq 1$, для всіх $u, v \in V$ функція F_N задовольняє оцінку (див. [146]):

$$|F_N(\|u\|_1) - F_N(\|v\|_1)| \leq \frac{1}{N} F_N(\|u\|_1) F_N(\|v\|_1) \|u - v\|_1. \quad (2.13)$$

То

$$\mathbb{R}^n \ni \{e_1, \dots, e_n\} \mapsto F_N \left(\left\| \sum_{i=1}^n e_i w_i \right\|_1 \right)$$

є локально ліпшицевою. Отже, з теореми Пікара задача Коші (2.11), (2.12) має єдиний розв'язок u^n на $[0, T_n]$. Оскільки $b_N(u, v, v) = 0$, то з (2.11) отримуємо:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u^n(t)\|^2 + \nu \|u^n(t)\|_1^2 = (f, u^n(t)), \quad (2.14)$$

$$\|u^n(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|u^n(p)\|_1^2 dp = \|u^n(0)\|^2 + 2 \int_0^t (f, u^n(p)) dp. \quad (2.15)$$

Використаємо нерівність Пуанкаре та лему Гронуола. Отримаємо оцінку:

$$\|u^n(t)\|^2 \leq \|u^n(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{2}{\nu^2 \lambda_1^2} \|f\|^2. \quad (2.16)$$

З (2.15), (2.16) отримуємо, що $T_n = T$ та

$$\{u^n\}_{n \geq 1} - \text{обмежена в } W(0, T) \text{ послідовність.} \quad (2.17)$$

Таким чином, існує таке $u \in W(0, T)$, що з точністю до підпослідовності справедливими є збіжності:

$$\begin{aligned} u^n &\rightharpoonup u \text{ *слабко в } L^\infty(0, T; H); \\ u^n &\rightharpoonup u \text{ слабко в } L^2(0, T; V), \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.18)$$

В силу (2.10), (2.17) послідовність $\{f^n = f - \nu A u^n - B_N(u^n, u^n)\}_{n \geq 1}$ є обмеженою в $L^2(0, T; V^*)$. Аналогічно [155] отримуємо існування таких $\gamma > 0$, $c > 0$, що $\forall n \geq 1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\tau|^{2\gamma} \left\| \bar{u}^n(\tau) \right\|^2 d\tau < c, \quad (2.19)$$

де \bar{u}^n – перетворення Фур'є функції u^n (покладемо $u^n(t) = 0$ поза відрізком $[0, T]$). Використаємо теорему про компактність з дробовими похідними (див.[155]). Отримаємо, що для довільної підобласті $\Omega_r = \Omega \cap \{|x| < r\}$ з точністю до підпослідовності справедливою є збіжність:

$$u^n \rightarrow u \text{ в } L^2(0, T; (L^2(\Omega_r))^3), n \rightarrow \infty. \quad (2.20)$$

З довільності вибору $r > 0$ та (2.20) випливає, що:

$$u^n(t, x) \rightarrow u(t, x) \quad (2.21)$$

Покажемо, що функція $u \in W(0, T)$ є розв'язком (2.7). Для цього досить обґрунтувати (при довільному фіксованому j) граничний перехід в рівності:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (u^n(t), \psi'(t) w_j) dt - (u_0^n, w_j) \psi(0) + \nu \int_0^T (u^n(t), \psi(t) w_j)_1 dt + \\ & + \int_0^T b_N(u^n(t), u^n(t), \psi(t) w_j) dt - \int_0^T (f, \psi(t) w_j) dt = 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

де $\psi \in C^1([0, T])$, $\psi(T) = 0$. З (2.18) отримуємо потрібну збіжність для перших трьох доданків рівності (2.22).

Покладемо $z^n(t, x) = F_N(\|u^n(t)\|) u^n(t, x)$. Оскільки $0 \leq F_N(r) \leq 1$, то

$$z^n \rightarrow z \text{ слабо в } L^2(0, T; V) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.23)$$

Внаслідок (2.20) і справедливості вкладення $\text{supp } w_j \subset \Omega_r$ для деякого $r > 0$, отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_0^T b_N(u^n(t), u^n(t), \psi(t)w_j) dt &= \int_0^T b(z^n(t), u^n(t), \psi(t)w_j) dt = \\ &= - \int_0^T b(z^n(t), \psi(t)w_j, u^n(t)) dt \rightarrow \int_0^T b(z(t), u(t), \psi(t)w_j) dt. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Залишилось показати, що виконується $z(t, x) = F_N(\|u(t)\|_1)u(t, x)$.

Спочатку покажемо, що

$$u^n(t) \rightarrow u(t) \text{ в } V \text{ ф.с.} \quad (2.25)$$

З (2.24) випливає, що $u \in W(0, T)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu(u, v)_1 + b(z, u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V. \quad (2.26)$$

Це означає виконання енергетичної рівності:

$$\|u(t)\|^2 + 2\nu \int_0^t \|u(p)\|_1^2 dp = \|u(0)\|^2 + 2 \int_0^t (f, u(p)) dp. \quad (2.27)$$

З (2.15), (2.27), (2.12) та (2.18), маємо:

$$\|u(t)\|^2 + 2\nu \limsup \int_0^t \|u^n(p)\|_1^2 dp \leq \|u(0)\|^2 + \int_0^t (f, u(p)) dp.$$

Отже,

$$\limsup \int_0^T \|u^n(p)\|_1^2 dp \leq \int_0^T \|u(p)\|_1^2 dp. \quad (2.28)$$

З іншого боку, в силу слабкої збіжності

$$\liminf \int_0^T \|u^n(p)\|_1^2 dp \geq \int_0^T \|u(p)\|_1^2 dp.$$

Таким чином,

$$u^n \rightarrow u \text{ в } L^2(0, T; V) \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.29)$$

З (2.29) отримуємо збіжність (2.25) з точністю до підпослідовності. Тоді з (2.20) випливає, що:

$$z^n \rightarrow F_N(\|u\|_1)u \text{ в } L^2(0, T; (L^2(\Omega_r))^3) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Внаслідок (2.23) справедлива рівність:

$$z(t, x) = F_N(\|u(t)\|_1)u(t, x) \text{ майже скрізь.}$$

Отже, u – розв’язок (2.7) та $u(0) = u_0$.

Доведемо єдиність. Нехай $w = u - v$, де u і v – розв’язки (2.7). Тоді з (2.13) та нерівності

$$|b(u, v, w)| \leq c_0 \|u\|_1 \|v\|_1 \|w\|_1^{\frac{1}{2}} \|w\|_1^{\frac{1}{2}},$$

Використовуючи міркування, аналогічні [146], отримаємо:

$$|b_N(u, u, w) - b_N(v, v, w)| \leq \nu \|w\|_1^2 + c \cdot N^4 \cdot \|w\|^2.$$

З рівності

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + 2\nu \|w(t)\|_1^2 = -2(b_N(u, u, w) - b_N(v, v, w))$$

випливає:

$$\frac{d}{dt} \|w(t)\|^2 + \nu \|w(t)\|_1^2 \leq 2c \cdot N^4 \cdot \|w(t)\|^2. \quad (2.30)$$

З нерівності Гронуола випливає, що $w(t) \equiv 0$ як тільки $u(0) = v(0)$. Довільність вибору $T > 0$ дозволяє вважати, що довільний розв'язок (2.7) є визначеним на $[0, +\infty)$. Тоді формула (2.8) коректно визначає напівгрупу $\{S(t) : H \rightarrow H\}_{t \geq 0}$.

Покажемо, що для напівгрупи $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, визначеної в (2.8), існує глобальний аттрактор в фазовому просторі H , обмежений в H рівномірно по N .

З оцінки (2.30) випливає неперервність $S(t) : H \rightarrow H$ для всіх $t \geq 0$. Кожний розв'язок (2.7) майже скрізь задовольняє рівність:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu \|u(t)\|_1^2 = (f, u(t)). \quad (2.31)$$

З нерівності Пуанкаре та леми Гронуола отримуємо оцінку:

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1 t} + \frac{2}{\nu^2 \lambda_1^2} \|f\|^2 \quad \forall t \geq 0. \quad (2.32)$$

З (2.32) випливає, що $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – дисипативна з поглинаючою множиною

$$B_0 = \{u \in H : \|u\|^2 \leq 1 + \frac{2}{\nu^2 \lambda_1^2} \|f\|^2\},$$

тобто для довільної обмеженої множини $B \subset H$ існує таке значення $T(B)$, що

$$S(t)B \subset B_0. \quad (2.33)$$

Покажемо, що напівгрупа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ є асимптотично компактною. Це означає, що для довільних послідовностей $\{u_n^0\}_{n \geq 1} \subset H$, $\{t_n\}_{n \geq 1} \subset [0, +\infty)$ таких, що: для деякого $R > 0$ $\|u_n^0\| \leq R$; $t_n \uparrow \infty$:

$$\text{послідовність } \{S(t_n)u_n^0\}_{n \geq 1} \text{ – передкомпактна в } H. \quad (2.34)$$

Слід відмітити, що згідно [31] асимптотична компактність напівгрупи та виконання (2.33) гарантують існування глобального атратора $A = A(N) \subset B_0$ для напівгрупи $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в фазовому просторі H .

Доведемо (2.34). Використаємо метод енергетичних рівнянь ([148], [155]). Внаслідок (2.32) послідовність $\{\xi_n = S(t_n)u_n^0\}_{n \geq 1}$ обмежена в H . Отже, з точністю до підпослідовності

$$\xi_n \rightarrow \xi \text{ слабо в } H \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.35)$$

Аналогічно для довільного $T > 0$ з точністю до підпослідовності (що залежить від T):

$$S(t_n - T)u_n^0 \rightarrow \xi^T \text{ слабо в } H \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (2.36)$$

Для кожного $n \geq 1$ покладемо $u_n(t) = S(t + t_n - T)u_n^0 = S(t)S(t_n - T)u_n^0$, $t \geq 0$. Визначена таким чином функція u_n задовольняє (2.31), (2.32), тому є обмеженою в $W(0, T)$. Отже, існує така функція $u \in W(0, T)$, що виконується (2.18). З рівності

$$(u_n(t + h) - u_n(t), v) = \int_t^{t+h} \langle u_n'(s), v \rangle ds$$

отримуємо справедливість таких оцінок для $\forall v \in V \quad \forall 0 \leq t < t + h \leq T$:

$$|(u_n(t + h) - u_n(t), v)| \leq c_T \|v\|_1 h^{\frac{1}{2}}; \quad (2.37)$$

$$\int_0^{T-h} |u_n(t + h) - u_n(t)|^2 dt \leq c_T h^{\frac{1}{2}}. \quad (2.38)$$

Міркуючи аналогічно [148], одержимо, що u_n збігається до u в сенсі (2.20), (2.21). Тоді для $z_n(t, x) = F_N(\|u_n(t)\|_1)u_n(t, x)$ існує така функція $z \in L^2(0, T; V)$, що виконується (2.23). Аналогічно (2.24) для $v \in V$:

$$\int_0^T b_N(u_n(t), u_n(t), v) dt \rightarrow \int_0^T b(z(t), u(t), v) dt.$$

З щільності вкладення V в V випливає, що u задовольняє (2.26) і, більш того, для майже всіх $t \in (0, T)$ виконується рівність:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + v \|u(t)\|_1^2 = (f, u(t)). \quad (2.39)$$

З (2.20) отримуємо, що $\forall r > 0 \quad u_n(t) \rightarrow u(t)$ в $(L^2(\Omega_r))^3$ для майже всіх $t \in (0, T)$ при $n \rightarrow \infty$. Таким чином, для всіх $v \in V$, для майже всіх $t \in (0, T)$: $(u_n(t), v) \rightarrow (u(t), v)$ при $n \rightarrow \infty$. З (2.37) випливає рівномірна обмеженість та рівностепенева неперервність на $[0, T]$ послідовності функцій $\{(u_n(t), v)\}_{n \geq 1}$. Оскільки $u \in C([0, T]; H)$, то

$$(u_n(t), v) \rightarrow (u(t), v) \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall v \in V.$$

З критерію слабкої збіжності в силу щільності вкладення V в H , маємо:

$$u_n(t) \rightarrow u(t) \text{ слабо в } H \text{ при } n \rightarrow \infty \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.40)$$

З (2.40), отримуємо, що

$$\begin{aligned} u_n(T) = \xi_n &\rightarrow \xi = u(T) \text{ слабо в } H \text{ при } n \rightarrow \infty, \\ u_n(0) = S(t_n - T)u_n^0 &\rightarrow \xi^T = u(0) \text{ слабо в } H \text{ при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Позначимо $[u] = \left(\nu \|u\|_1^2 - \nu \frac{\lambda_1}{2} \|u\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ норму в V , еквівалентну нормі $\|u\|_1$ (див. [148]). Тоді функції $\{u_n\}_{n \geq 1}$, u майже скрізь на $(0, T)$ задовольняють рівність:

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 + \nu \lambda_1 \|u(t)\|^2 + 2[u(t)]^2 = 2(f, u(t)). \quad (2.41)$$

Для довільного $n \geq 1$ застосуємо (2.41) до u_n . Маємо:

$$\|u_n(T)\|^2 = \|\xi_n\|^2 = \|u_n(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1 T} + 2 \int_0^T e^{\nu \lambda_1 (t-T)} ((f, u_n(t)) - [u_n(t)]^2) dt. \quad (2.42)$$

Тоді з (2.18) випливає, що:

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|^2 + 2 \int_0^T e^{\nu \lambda_1(t-T)} [u(t)]^2 dt &\leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1 T} + 2 \int_0^T e^{\nu \lambda_1(t-T)} (f, u(t)) dt. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Застосувавши (2.41) до u , маємо:

$$\|u(T)\|^2 = \|\xi\|^2 = \|u(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1 T} + 2 \int_0^T e^{\nu \lambda_1(t-T)} ((f, u(t)) - [u(t)]^2) dt. \quad (2.44)$$

З (2.43) та (2.44) отримаємо:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1 T} - \|u(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1 T} + \|\xi\|^2. \quad (2.45)$$

З (2.32) випливає, що для будь-якого $T > 0$

$$\begin{aligned} \|u(0)\|^2 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|^2 \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n(0)\|^2 \leq \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\|u_n(0)\|^2 e^{-\nu \lambda_1(t_n - T)} + \frac{2}{\nu^2 \lambda_1^2} \|f\|^2 \right) \leq \frac{2}{\nu^2 \lambda_1^2} \|f\|^2 + 1. \end{aligned}$$

Тоді з (2.45) при $T \rightarrow \infty$ випливає, що

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|\xi_n\|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

Остання нерівність разом зі слабкою збіжністю ξ_n до ξ в H гарантує

передкомпактність послідовності $\{\xi_n\}_{n \geq 1}$ в H .

Слід зауважити, що з загальних результатів [31] та нерівності (2.28) випливає, що одержаний аттрактор $A = A(N)$ є зв'язною стійкою підмножиною фазового простору H і складається з обмежених повних траєкторій, тобто

$$\forall z \in A \quad \exists u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow H : u(0) = z, \forall t \geq 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R} \quad S(t)u(\tau) = u(t + \tau).$$

Далі, оскільки $\forall N \geq 1 \quad A(N) \subset B_0 = \left\{ u \in H : \|u\|^2 \leq 1 + \frac{2}{\nu^2 \lambda_1^2} \|f\|^2 \right\}$, то маємо непорожню w -верхню границю Куратовського для $\{A(N)\}_{N \geq 1}$:

$$\Theta = w - \limsup A(N) = \{u \in H : \exists u_{N_k} \in A(N_k), \quad u_{N_k} \rightarrow u \text{ слабо при } k \rightarrow \infty \text{ в } H\}.$$

Доведемо, що через будь-яку $u_0 \in \Theta$ проходить повна траєкторія 3D системи Нав'є-Стокса $u(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow H$, причому $\forall t \in \mathbb{R} \quad u(t) \in B_0$.

Візьмемо довільне $u_0^N \in B_0$ таке, що $u_0^N \rightarrow u_0$ слабо в H . Покажемо, що розв'язок (2.7) $u_N(\cdot)$ такий, що $u_N(0) = u_0^N$, збігається в сенсі (2.18) до $u(\cdot) \in W_T$, де $u(\cdot)$ задовольняє рівняння:

$$\frac{d}{dt}(u, v) + \nu(u, v)_1 + b(u, u, v) = (f, v), \quad \forall v \in V \quad (2.46)$$

з початковою умовою

$$u(0) = u_0 \quad (2.47)$$

Дійсно, оскільки $\forall N \geq 1 \quad u_N(\cdot)$ задовольняє (2.15), (2.16), $0 \leq F_N(r) \leq 1$, то:

$$\begin{aligned} \{u_N\}_{N \geq 1} &- \text{обмежена в } W_T; \\ \left\{ \frac{du_N}{dt} \right\}_{N \geq 1} &- \text{обмежена в } L^{\frac{4}{3}}(0, T; V^*). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Отже, існує така $u \in W_T$, що з точністю до підпослідовності $u_N \rightarrow u$ в сенсі (2.18). Крім того, з (2.48) випливає, що $\forall v \in V, \forall 0 \leq t < t+h \leq T$

$$\begin{aligned} |(u_N(t+h) - u_N(t), v)| &\leq c_T \|v\|_1 h^{\frac{1}{4}}; \\ \int_0^{T-h} |u_N(t+h) - u_N(t)|^2 dt &\leq c_T h^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Це означає, що u_N збігається до u в сенсі (2.20), (2.21).

Нехай $\int_0^T \|u_N(t)\|_1^2 dt \leq K_T$. Тоді $\forall p \geq 1$ (див. [55])

$$F_N(\|u_N(\cdot)\|_1) \rightarrow 1 \text{ при } N \rightarrow \infty \text{ в } L^p(0, T). \quad (2.49)$$

Покажемо, що $\forall v \in V$

$$\int_0^T b(u_N(t), u_N(t), v) dt \rightarrow \int_0^T b(u(t), u(t), v) dt. \quad (2.50)$$

Оскільки $\text{supp} V \subset \Omega_r$ для деякого $r > 0$, то зі збіжностей (2.18), (2.20) випливає, що

$$\int_0^T b(u_N(t), u_N(t), v) dt \rightarrow \int_0^T b(u(t), u(t), v) dt, \quad N \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

Крім того,

$$\int_0^T |b(u_N(t), u_N(t), v)|^2 dt \leq \int_0^T \|u_N(t)\|^2 \|u_N(t)\|_1^2 \|v\|_{(L^\infty(\Omega_r))}^2 dt \leq c(T, v). \quad (2.52)$$

З (2.49), (2.51), (2.52) отримуємо шукану збіжність (2.50). Це дозволяє перейти до границі при $N \rightarrow \infty$ в (2.7) і одержати в результаті, що u задовольняє (2.46) для всіх $v \in V$, а, отже, й для всіх $v \in V$. При цьому аналогічно (2.40)

$$u_N(t) \rightarrow u(t) \text{ слабо в } H \text{ при } N \rightarrow \infty \quad \forall t \in [0, T], \quad (2.53)$$

зокрема, $u(0) = u_0$.

Нехай тепер $u_0 \in \Theta$. Тоді $\exists u_0^N \in A(N): u_0^N \rightarrow u_0$ слабо в H . Нехай $u^N: \mathbb{R} \rightarrow H$ – повна траєкторія, для якої $u^N(0) = u_0^N$, $u^N(t) \in A(N) \subset B_0$. Застосовуючи стандартні міркування (див. [55]), одержуємо $u(\cdot): \mathbb{R} \rightarrow H$, $u(0) = u_0$, причому, внаслідок (2.53) $u(t) \in B_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Таким чином, в цьому підрозділі проведено якісний аналіз модифікованої системи Нав'є-Стокса в каналоподібній області. Для модифікованої системи, яка співпадає з тривимірною системою Нав'є-Стокса при обмежених градієнтах швидкостей в необмеженій області, що задовольняє нерівність Пуанкаре, отримано існування та єдиність розв'язку задачі Коші. Для відповідної напівгрупи за допомогою теорії глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем встановлено існування глобального атрактора. Крім того, показано його близькість до множини обмежених повних траєкторій немодифікованої 3D системи Нав'є-Стокса.

2.3. Динамічна модель точкових вихорів

Зважаючи на складність дослідження гідродинамічних систем на основі рівнянь Нав'є-Стокса, для опису течії будемо застосовувати скінченновимірну модель, в якій поле течії представляється дискретною множиною перпендикулярних до площини потоку ізольованих вихрових відрізків [7]. Виникнення концепції вихрового руху пов'язане з основоположною роботою Гельмгольца 1858 року [89], де було введено поняття вихрового відрізка (трубки) та показано, що вихрові трубки рухаються разом із рідиною. Зазначимо, що в двовимірній теорії розглядається перетин вихрового відрізка з площиною потоку, який ідентифікується як точковий вихор. Теорія вихрового руху інтенсивно розвивалася протягом минулого сторіччя. Найбільш повна бібліографія з цієї тематики з моменту виникнення до середини 20-го сторіччя представлена в роботі [126]. Сучасні досягнення в цій області пов'язані з імплементацією в неї принципів теорії динамічних систем [43, 44].

Будемо розглядати N вимірну систему точкових вихорів циркуляції Γ_k , $k = 1, \dots, N$, в необмеженій області $\Omega \in \mathbf{R}^2$, яку заповнено ідеальною нестисливою рідиною. Течія, що розглядається, є потенційною, за виключенням точок (x_k, y_k) , в яких знаходяться вихори. Завдяки цьому, для вивчення потоку можуть бути застосовані методи теорії функцій комплексної змінної. Ідентифікуємо положення вихорів точками комплексної площини $z_k = x_k + iy_k \in C$, де $i = \sqrt{-1}$. Комплексний потенціал течії, яка генерується цією вихровою системою в $\forall z \in C$, має наступний вигляд:

$$W(z) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \theta(z, z_k) \quad (2.54)$$

де $\theta(z, z_k)$ – комплексна функція Гріна для рівняння Лапласа, що визначає

вплив на потік k -го вихору:

$$\theta(z, z_k) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z - z_k). \quad (2.55)$$

Комплексно-спряжена швидкість в точках області отримується як:

$$\bar{V} = (v_x - iv_y)(z) = \frac{dW(z)}{dz} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \frac{\Gamma_k}{z - z_k}. \quad (2.56)$$

З (2.56) випливає, що:

$$\frac{d\bar{z}_k}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1, l \neq k}^N \frac{\Gamma_l}{z_k - z_l}, k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.57)$$

Виділяючи дійсну і уявну частини (2.57), отримуємо еволюційні рівняння для заданої системи точкових вихорів:

$$\begin{aligned} \frac{dx_k}{dt} &= -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=1, l \neq k}^N \frac{\Gamma_l (y_k - y_l)}{r_{kl}}, \\ \frac{dy_k}{dt} &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1, l \neq k}^N \frac{\Gamma_l (x_k - x_l)}{r_{kl}}, k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.58)$$

де $r_{kl} = \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}$. Фізичний зміст рівнянь (2.58) полягає в тому, що кожен вихор, обертаючись, створює поле швидкості величиною $\frac{\Gamma_k}{2\pi r}$, де r – відстань від вихору до заданої точки, а сам він переноситься зі швидкістю, яка генерується усіма іншими вихорами.

Рівняння руху вихорів (2.58) можуть бути записані у канонічному вигляді, якщо ввести функцію Гамільтона як

$$H(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k,l=1, l \neq k}^N \Gamma_k \Gamma_l \ln r_{kl}. \quad (2.59)$$

Тоді для узагальнених координат маємо наступні рівняння:

$$\Gamma_k \frac{dx_k}{dt} = \frac{dH}{dy_k}, \quad \Gamma_k \frac{dy_k}{dt} = \frac{dH}{dx_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (2.60)$$

Гамільтоновий формалізм в гідродинаміці розвинутий і докладно описаний в роботах [8, 43, 44, 143]. Переваги цього підходу полягають в тому, що він дозволяє дослідити поведінку точкових вихорів на основі теорії динамічних систем. Зокрема, з (2.60) випливає, що фазовий простір системи точкових вихорів співпадає з областю течії, а траєкторії вихорів відповідають лініям рівнів функції H . Зазначимо також, що Гамільтоніан (2.59) представляє собою кінетичну енергію руху рідини, що створюється заданою системою точкових вихорів. З аналізу системи (2.60) випливає, що $\frac{dH}{dt} = 0$, $H = \text{const}$.

Якщо область течії Ω обмежена твердою стінкою, то еволюція системи (2.57) повинна задовольняти умову непротікання границі:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.61)$$

Для канонічних областей (півплощини чи круга) виконання умови (2.61) забезпечується побудовою для кожного вихору його симетричного відображення відносно границі [128]. Так, якщо область течії представляє собою півплощину, ця уявна особливість знаходиться дзеркальним відбиттям дійсного вихору від стінки, і тоді функція, яка описує вплив на потік вихору одиничної інтенсивності має наступний вигляд:

$$\theta(z, z_0) = \frac{1}{2\pi i} [\ln(z - z_0) - \ln(z - \bar{z}_0)], \quad (2.62)$$

де z_0, \bar{z}_0 – комплексні координати дійсного і спряженого вихорів відповідно.

Розв’язок задачі про рух системи вихорів в більш складних областях може бути знайдений конформним перетворенням фізичної області течії у канонічну, де функція вихору відома, наприклад, має вигляд (2.62). Складність цього підходу полягає в тому, що швидкість вихору і його Гамільтоніан не є інваріантними при конформному відображенні, але вони можуть бути побудовані із застосуванням правила Рауфа [8]. Якщо функція $\zeta = \zeta(z)$ здійснює конформне відображення області течії в фізичній площині xOy на канонічну в допоміжній площині $\xi O\eta$, то комплексно-спряжена швидкість в області течії обчислюється як:

$$\bar{V} = (v_x - iv_y)(z) = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}, \quad (2.63)$$

де $W(\zeta)$ – комплексний потенціал течії у допоміжній площині.

При перетворенні фізичної області течії у півплощину, функція $W(\zeta)$ для системи N точкових вихорів, з урахуванням (2.62), має наступний вигляд:

$$W(\zeta) = \sum_{k=1}^N \Gamma_k \theta(\zeta, \zeta_k) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k [\ln(\zeta - \zeta_k) - \ln(\zeta - \bar{\zeta}_k)]. \quad (2.64)$$

З (2.63), (2.64) отримуємо рівняння, що описує рух точкових вихорів у фізичній площині:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{z}_k}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{l=1, l \neq k}^N \Gamma_l \left(\frac{1}{\zeta_k - \zeta_l} - \frac{1}{\zeta_k - \bar{\zeta}_l} \right) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=z_k} + \frac{\Gamma_k}{4\pi\eta_k} \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=z_k} + \\ + \frac{\Gamma_k}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} \Big/ \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{z=z_k}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Другий член в (2.65) представляє собою самоіндуковану швидкість вихору біля стінки, а останній – поправку Рауфа. Її виведення можна знайти, наприклад, в [8].

В роботі [115] показано, що рух системи N точкових вихорів в області, обмеженій твердою границею, задовольняє канонічним рівнянням (2.63), де Гамільтоніан H , який названо функцією Киркгофа-Рауфа, будується, виходячи з функції впливу вихору в цій області. Крім того, він може враховувати і зовнішню течію, якщо вона описується функцією ψ_0 , що відповідає умові (2.61) та не залежить від розташування вихорів. Виходячи з теореми Ліня [115] і потенціалу вихору (2.62), можемо записати Гамільтоніан H' для відображених вихорів, що локалізовані у верхній півплощині допоміжної площини $\xi O \eta$ наступним чином:

$$\begin{aligned} H'(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, \eta_k) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{k,l=1, k>l}^N \Gamma_k \Gamma_l \ln \frac{\rho_{kl}}{\bar{\rho}_{kl}} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \ln(2\eta_k) \\ + V_{\infty\zeta} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \eta_k, \end{aligned} \quad (2.66)$$

де

$$\begin{aligned} \rho_{kl} &= \sqrt{(\xi_k - \xi_l)^2 + (\eta_k - \eta_l)^2}, \\ \bar{\rho}_{kl} &= \sqrt{(\xi_k - \xi_l)^2 + (\eta_k + \eta_l)^2}. \end{aligned}$$

Останній член в (2.66) описує вплив плоскопаралельної зовнішньої течії швидкості $V_{\infty\zeta}$.

Для знаходження Гамільтоніану H заданої системи вихорів у фізичній площині xOy , скористаємося теоремою Ліня з роботи [116], що зв'язує функції H і H' :

$$H(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) = H'(\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_k, \eta_k) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k^2 \ln \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| \quad (2.67)$$

Зазначимо, що при конструюванні Гамільтоніану $H(x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$, необхідно враховувати також трансформацію зовнішньої течії при конформному перетворенні. Як і в безграничній рідині, функція (2.62) представляє собою кінетичну енергію рідини, що створюється N вихорами в обмеженому потоці: $H = \text{const}$. Аналогічний підхід для опису вихрової течії застосований в роботі [69], де розглядаються системи вихорів, локалізовані в геометрично складних багатозв'язних областях.

Інший спосіб задовольнити умову (2.61) полягає у моделюванні твердої границі неперервним вихровим шаром [7] з його послідуною дискретизацією приєднаними вихорами. Цей підхід є достатньо потужним інструментом в чисельних розрахунках вихрових течій [6, 14], але він потребує значних машинних ресурсів, спрямованих на обчислення індукованих швидкостей вихорів. Крім того, знаходження закону розподілу приєднаних вихорів становить нетривіальну проблему, при вирішенні якої необхідно враховувати фізичні особливості течій, що розглядаються. Тому, застосування конформних перетворень там, де це можливо, істотно спрощує розрахунки, що дозволяє створити нескладні, якісні контролери для управління течіями. В будь-якому випадку, присутність твердих границь значно ускладнює математичну структуру рівнянь (2.60), але важливим є те, що система вихорів в обмеженій області залишається гамільтоновою, і для її аналізу можуть бути застосовані підходи, розроблені в теорії динамічних систем [92].

2.4. Задача керування в системі точкових вихорів

Будемо розглядати систему N точкових вихорів в потоці ідеальної нестисливої рідини в області, яка обмежена твердою границею. Вважаємо, що швидкість потоку на нескінченності дорівнює V_∞ . Ми показали в попередньому підрозділі, що за цих умов рух вихорів описується канонічними рівняннями (2.60) з Гамільтоніаном у формі (2.67) і, таким чином, проблема керування в цій системі може бути сформульована, ґрунтуючись на рівняннях (2.1) – (2.2) [143].

Нехай $\mathbf{X}(t) = [x_1(t), y_1(t), \dots, x_N(t), y_N(t)]^T$ – вектор стану заданої вихрової системи в момент часу t , тоді її еволюція описується рівнянням:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) \quad (2.68)$$

де $\mathbf{f}: R^{2N} \rightarrow R^{2N}$ – функція швидкості вихорів. Зазначимо, що швидкість кожного вихору генерується іншими вихорами і зовнішнім потоком. Якщо до цієї множини вихорів застосоване керування потужності $U: R \rightarrow R^M$ з M ступенями свободи, то автономне рівняння (2.68) приймає вигляд:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X})U, \quad (2.69)$$

де $\mathbf{b}(\mathbf{X}): R^{2N} \rightarrow R^{2N}$ – оператор керування, що показує, як дія U впливає на динаміку системи.

В гідродинамічному сенсі [78], керування вихровою системою є можливим і при $U = 0$, тоді воно розглядається як створення необхідної моделі течії за допомогою пристроїв, що не потребують енергії для свого функціонування. Наприклад, коли змінюється геометрична конфігурація течії

за допомогою додаткових елементів, наприклад, нерівностей поверхні. Такий тип керування називається пасивним або параметричним, тому що отримання необхідної структури потоку потребує визначення геометричних параметрів керуючого пристрою.

При реалізації активного керування, коли $U \neq 0$, можливі декілька типів процесу. Якщо активна дія задається наперед, такий тип керування за Гад-ель-Хаком [78], називається детермінованим. В цьому випадку можливо, що $U = const$, або $U = U(t)$, але вигляд U не змінюється протягом усього процесу. Схему такого керування представлено на рис. 2.3.

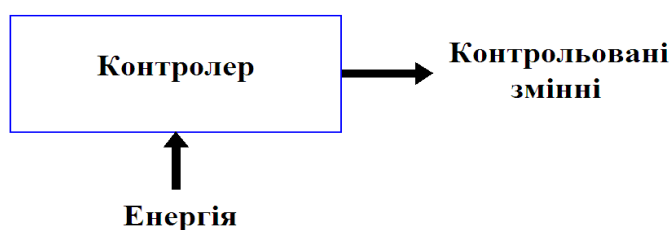


Рис. 2.3. Схема детермінованого керування

При реактивному керуванні, коли функція $U(t)$ залежить від реакції на неї з боку течії, можливі дві керуючі схеми – з відкритим і замкненим циклами. В першому випадку, змінні, які контролюються і вимірюються, є різними. Тоді дія контролеру визначається сигналом, який подається від вимірюваних змінних, але параметри потоку, на які впливає цей контролер, є або іншими або локалізованими нижче за течією (рис. 2.4).

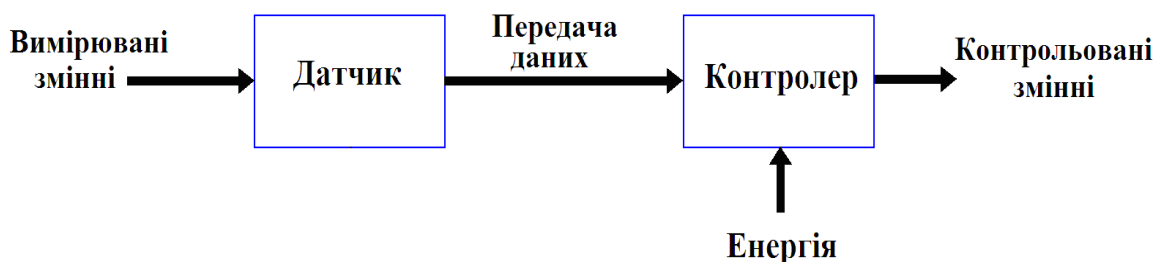


Рис. 2.4. Схема реактивного керування з відкритим циклом

Реактивне керування із замкненим циклом передбачає обернений зв'язок між керуючою дією та її результатом. Тут інформація про стан системи на виході вимірюється датчиком і направляється в аналізатор, який коректує керуючу дію (енергію, що поступає в систему) відповідно до цілей керування (рис. 2.5).

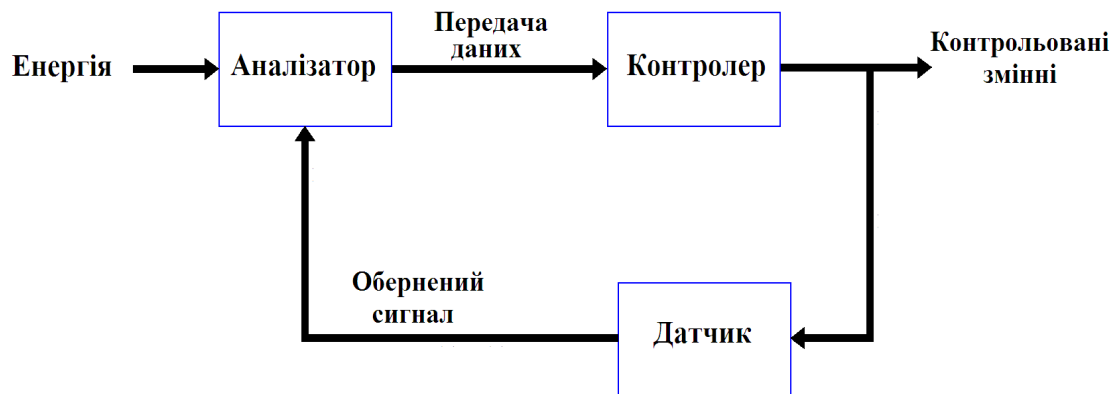


Рис. 2.5. Схема реактивного керування із замкненим циклом

Очевидно, що класична теорія управління має справу з реактивним керуванням, тоді, еволюційне рівняння (2.69) має бути доповнене рівнянням, яке описує спосіб отримання контрольованих змінних:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}(\mathbf{X}) + \mathbf{D}U, \quad (2.70)$$

де $\mathbf{Y} \in R^K$ – вектор контрольованих змінних, $\mathbf{C}: R^{2N} \rightarrow R^K$ та $\mathbf{D}: R^M \rightarrow R^K$ – оператори, що визначають параметри системи вимірювання.

Важливу роль в дослідженні поведінки динамічних систем має аналіз рівноважних розв'язків \mathbf{X}_0 рівняння (2.68), при яких $\mathbf{f}(\mathbf{X}_0) = 0$ [92]. Тоді система (2.69) може бути лінеаризована в околі точки \mathbf{X}_0 , так що виконується:

$$\frac{d\mathbf{X}'}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X}' + \mathbf{b}(\mathbf{X}_0)U, \quad (2.71)$$

де $\mathbf{X}'(t)$ – вектор малих збурень рівноважного розв’язку \mathbf{X}_0 , $\mathbf{A} = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_0)$ – Якобіан функції f . Перевагою цього підходу є те, що диференціальні рівняння високого порядку (2.69) замінюються рівняннями першого порядку, до яких може бути застосований формалізм фазового простору [92, 143], що включає визначення топологічних особливостей системи.

2.5. Висновки до розділу

Проведено якісний аналіз тривимірної системи рівнянь Нав’є-Стокса в каналоподібній області. Для модифікованої системи, яка співпадає з тривимірною системою Нав’є-Стокса при обмежених градієнтах швидкостей в необмеженій області, що задовольняє нерівність Пуанкаре, отримано існування та єдиність розв’язку задачі Коші. Для відповідної напівгрупи за допомогою теорії глобальних атракторів нескінченновимірних динамічних систем встановлено існування глобального атрактора. Крім того, показано його близькість до множини обмежених повних траєкторій немодифікованої 3D системи Нав’є-Стокса.

Зважаючи на складність дослідження гідродинамічних систем на основі рівнянь Нав’є-Стокса, в цьому розділі запропоновано для опису течії застосовувати скінченновимірну модель, в якій поле течії представляється дискретною множиною перпендикулярних до площини потоку ізольованих вихрових відрізків. Показано, що динаміка цієї системи як в безграничній рідині, так і в областях, обмежених твердою границею, відповідає канонічним рівнянням, де Гамільтоніан співпадає з функцією течії. Тому, для дослідження течії, а також побудови та обґрунтування алгоритмів управління нею можуть застосовуватися результати класичної теорії керування

нелінійними динамічними системами. Розглянуто різні стратегії керування потоками рідини (параметричне, детерміноване та реактивне керування), для кожної з них сформульовано задачу керування щодо системи точкових вихорів, локалізованих в обмеженій області за наявності зовнішньої течії.

РОЗДІЛ 3. ПОБУДОВА МОДИФІКОВАНОЇ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ СПІЙМАНОГО ВИХОРУ ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ ДО КЕРУВАННЯ ТЕЧІЄЮ В ЦИЛІНДРИЧНИХ КАНАВКАХ

3.1. Алгоритм розв’язання задач керування потоками рідини

Керування потоком передбачає створення бажаної структури течії в гідродинамічних системах. Вихрова течія, що генерується при русі тіла у воді, повітрі або в гідравлічних потоках, є головним фактором, який визначає енерговитрати, зумовлені експлуатацією технічних систем. Зменшення опору поганообтічних тіл, збільшення підйимальної сили крила, забезпечення надійності гідравлічних споруд, інтенсифікація перемішування – все це проблеми, вирішення яких залежить від оптимальної трансформації вихрової структури потоку. Як вже відмічалось в другому розділі, першим кроком при розв’язанні задач керування течією є визначення мети керування та формулювання відповідного критерію щодо властивостей та структури гідродинамічної течії.

Слідуючим етапом є формулювання постановки задачі керування потоком. Цей етап включає вибір керуючих пристроїв, які забезпечують бажану структуру течії. Одним з ефективних способів, які дозволяють змінити структуру вихрової течії, є організація примусового відриву потоку з метою створення локальних відривних зон [26, 40, 60]. За допомогою цієї технології можна впливати як на пристінний потік, так і на течію в цілому. Перехід від хаотичного руху когерентних структур у граничному шарі до регулярних вихроутворень зменшує інтенсивність енергообміну між потоком і поверхнею тіла, завдяки чому падає опір тертя поверхні, що обтікається [26]. З іншого боку, трансформація відривної течії навколо тіла може мати позитивний вплив на структуру та параметри вихрової доріжки сліду, що

проявляється у зменшенні опору форми або рівня акустичних шумів [40, 60, 82]. Стратегія керування в цих випадках спрямована на створення «інтелектуального» потоку рідини, в якому вихори формуються відповідно до керуючої схеми та теоретичної або напівемпіричної моделі, що передбачає їхню поведінку.

Одним із шляхів генерування крупномасштабних вихорів у пристінному потоці є зміна геометричної конфігурації поверхні за допомогою виступів, ребер, канавок та ін. [36]. Утворені вихори можуть бути як нерухомими –стаціонарні відривні зони, так і рухатися у потоці регулярним чином. Але у всіх випадках схема керування має забезпечити їхню стійкість до зовнішніх збурень, інакше вона буде неефективною. В той же час, і фізичні експерименти, і чисельні розрахунки виявили чутливість локальних відривних зон до зовнішніх збурень, особливо, з періодичною складовою [87, 106], яка істотно зростає при збільшенні числа Рейнольдса. Тому прогрес у розвитку алгоритмів керування пристінними потоками пов'язаний з дослідженням динамічних властивостей вихорів і природи їхньої хаотичної поведінки.

Наступним кроком є побудова математичної моделі, яка має адекватно відображати властивості гідродинамічної системи та забезпечувати розв'язання поставленої задачі керування. В роботі для опису течії пропонується застосовувати скінченновимірну модель, в якій поле течії представляється дискретною множиною перпендикулярних до площини потоку ізольованих вихрових відрізків. Наступним кроком є розвиток теоретичного методу або чисельної схеми для розв'язання отриманих рівнянь. На заключному етапі проводиться аналіз результатів, перевіряється чи досягнена мета керування. З вищесказаного випливає загальний алгоритм розв'язання задач керування потоками рідини, схему якого представлено на рис. 3.1.

Розглянемо алгоритм розв'язання задач керування потоками рідини із застосуванням модифікованої динамічної моделі спійманого вихору на

прикладі керування течією в циліндричних канавках.

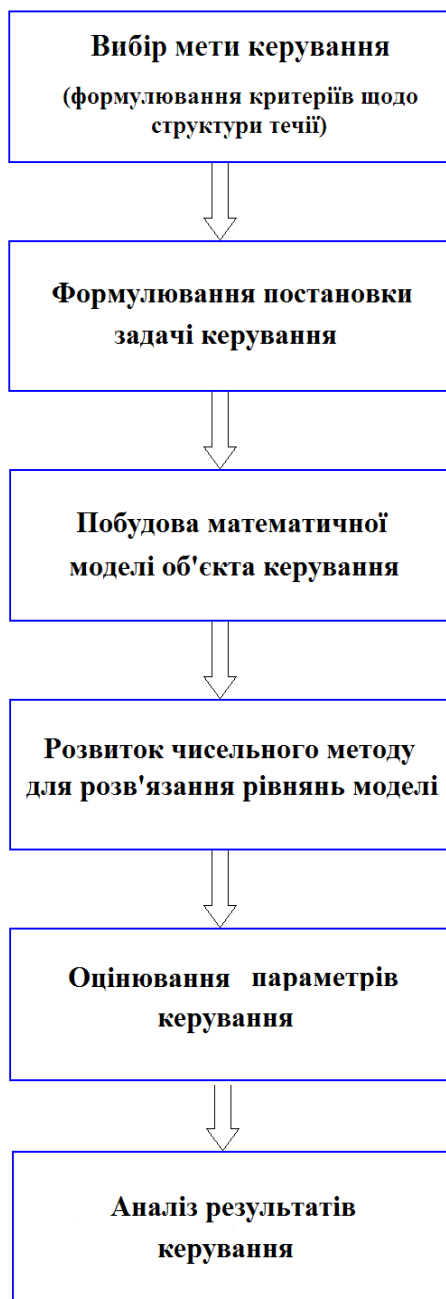


Рис. 3.1. Алгоритм розв'язання задач керування потоками рідини

3.2. Фізичне обґрунтування проблеми керування пристінною течією поблизу нерівності

Ефективним способом, що дозволяє утворити у пристінному потоці локальну циркуляційну течію із заданими властивостями, є розміщення на

поверхні, що обтікається, циліндричної канавки. Вперше цей підхід до керування потоками рідини був запропонований в роботах [25, 145] для зменшення гідравлічних втрат в дифузорах. Рінглебом в роботі [145] була побудована модель спійманих вихорів в канавках типу «сніговий карниз», яка ґрунтувалася на аналізі критичних точок потоку і дозволила одержати геометричні параметри нерівності, які забезпечують існування стійкої циркуляційної течії без підведення зовнішньої енергії. Прикладом реалізації концепції спійманих вихорів в аеродинаміці є крило Каспера, що застосовується для збільшення підйімальної сили літальних апаратів [96, 163]. Клас поверхонь, поблизу яких можлива генерація стійких областей завихреності, розширює теоретична модель спійманих вихорів в канавках, запропонована в роботі [53].

Головною перешкодою для застосування циліндричних канавок в технічних пристроях є сильна нелінійна взаємодія між циркуляційною течією в канавці і зовнішнім потоком, що потребує розвитку алгоритмів керування течією, спрямованих на мінімізацію збурень [151]. Але інтерес до керування течіями в канавках зумовлений не лише технічними застосуваннями, а й тим, що ця проблема є хорошим тестовим прикладом для створення і обґрунтування алгоритмів управління течіями рідини. Прогрес у цьому напрямку пов'язаний з розумінням як теорії керування, так і фізичних особливостей потоку, що розглядається.

На рис. 3.2 представлено вихрову течію, яка генерується при обтіканні циліндричної канавки при великих числах Рейнольдса, отримана відомим

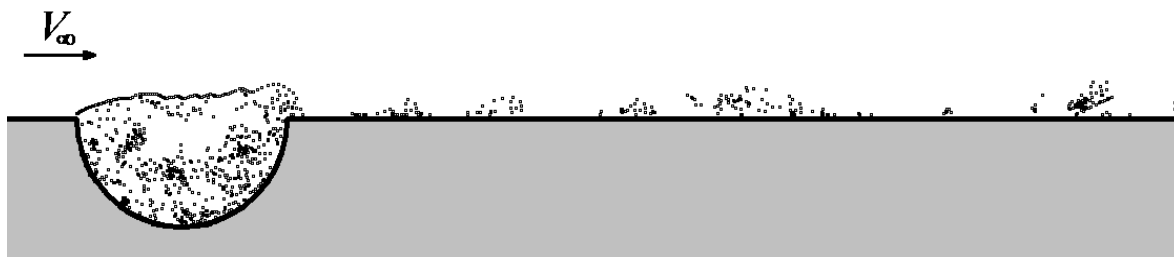


Рис. 3.2. Формування вихрової течії при обтіканні циліндричної канавки

методом дискретних вихорів [14].

Зазначимо, що в цій постановці геометричні параметри нерівності значно перевищують товщину граничного шару, який розвивається на стінці. На рис. 3.2 можна бачити велику циркуляційну зону всередині канавки, яка утворюється через відрив потоку у вхідній кромці, і збурену течію в пристінній області за канавкою. Процес витікання завихреності з канавки є істотно нестационарним, оскільки відбувається періодичне викидання у пристінну область вихрових згустків різного масштабу. Збурення пристінної течії призводять до того, що канавка, як інструмент керування потоком, стає неефективною. Тому, ключова проблема, що виникає при запровадженні цієї технології, полягає в мінімізації викидів завихреності з канавки. Це потребує створення алгоритмів керування, спрямованих на стабілізацію циркуляційної течії в канавці, або в термінології Рінглеба – забезпечення існування спійманого вихору.

3.3. Постановка задачі керування течією в циліндричній канавці

Для отримання параметрів стійкої циркуляційної течії (спійманого вихору) в канавках різного розміру, а також характеристик керуючих пристроїв будемо використовувати спрощену модель, в якій течія в канавці моделюється одним точковим вихором. При цьому, вважається, що він розташований в центрі завихреності, а його циркуляція рівна інтегральній завихреності в області. Джерела і стоки, які передбачається використовувати як елементи керуючих схем, також описуються сингулярними розв'язками, що дозволяє застосувати для розв'язання проблеми класичну теорію потенційних течій. Хоча цей підхід є досить грубим, щоб змоделювати тонку структуру пристінних течій, але, як показали дослідження [75, 76, 145], він є ефективним для вивчення динамічних властивостей потоків і створення алгоритмів керування.

Розглядається течія ідеальної нестисливої рідини в області, яка обмежена стінкою з вирізаною у ній циліндричною канавкою (рис. 3.3).

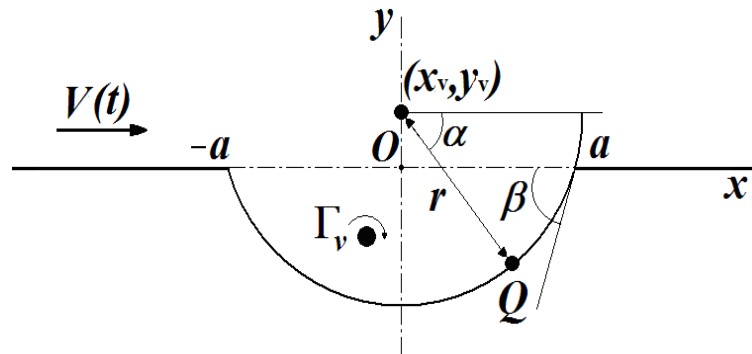


Рис. 3.3. Геометрія області течії

Вважається, що параметри нерівності значно перевищують товщину граничного шару, сформованого перед нею. Вісь Ox системи координат спрямована вздовж стінки, вісь Oy проходить через центр нерівності. Геометрія канавки описується півхордою a і кутом β між віссю і дотичною до канавки в точці їх перетину (рис.3.3). В залежності від глибини канавки, її центр може бути розташований вище або нижче стінки. Швидкість зовнішньої течії в загальному випадку складається зі швидкості рівномірного потоку V_∞ і нестационарної компоненти $v(t)$: $V(t) = V_\infty + v(t)$. Циркуляційна область, яка генерується в канавці внаслідок відриву граничного шару в гострих кромках, замінюється точковим вихором циркуляції Γ_v з координатами (x_v, y_v) . Для стабілізації вихрової течії передбачається використовувати відкачування рідини. Процес відкачування рідини моделюється стоком інтенсивності $Q(x_q, y_q)$, розташованим на стінці канавки. Його положення однозначно задається кутовою координатою α (рис.3.3): $x_q = r \sin \alpha$, $y_q = -r \cos \alpha + y_c$.

Динамічна система, що розглядається, має один ступінь свободи, отже, її еволюція описується нелінійним диференціальним рівнянням в R^2 :

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad (3.1)$$

де $\mathbf{X} \in R^2$ — вектор координат вихору $\mathbf{X}(t) = (x_v(t), y_v(t))$, вектор-функція $\mathbf{f} : R^2 \rightarrow R^2$ визначає швидкість вихору без урахування впливу керуючого елементу (в даному випадку – стоку). Відповідно до рівняння (2.69)

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X})Q, \quad (3.2)$$

$\mathbf{b}(\mathbf{X}) : R^2 \rightarrow R^2$ – оператор керування, який встановлює зв'язок між точками (x_v, y_v) та (x_q, y_q) .

При $Q = 0$ встановлення канавки на поверхні, що обтікається, забезпечує пасивне (або параметричне) керування пристінною течією;

$Q = \text{const}$ означає детерміноване (визначене наперед) керування циркуляційною течією в канавці;

Якщо $Q = Q(t)$, маємо керування циркуляційною течією з оберненим зв'язком, де зв'язок між контрольованими даними і потужністю відкачування рідини описується рівнянням:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{D}Q, \quad (3.3)$$

де $\mathbf{Y} \in R^2$ – вектор контрольованих змінних, $\mathbf{D} : R^2 \rightarrow R^2$ – оператор, який встановлює зв'язок між контрольованими змінними і точкою стоку.

Практична мета керування полягає в тому, щоб сформувати і підтримувати в канавці стаціонарну циркуляційну течію, яка б запобігала генерації вихрових пелен в гострих кутах. Виходячи з цього, теоретичне моделювання процесу зводиться до визначення параметрів відкачування рідини Q і α , при яких забезпечується існування стійкого нерухомого

вихору за умови, що в гострих кромках границі задовольняється теорема Кутта-Жуковського про скінченність швидкості.

Для того, щоб вихор був у рівновазі, повинно виконуватися:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0. \quad (3.4)$$

В заданій конфігурації потоку умова 3.4 означає, що координати спійманого вихору задовольняють рівнянню:

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X})Q = 0, \quad (3.5)$$

Умова про безвідривне обтікання кутів канавки має вигляд:

$$\mathbf{V}(-a, 0) = C_1, \mathbf{V}(a, 0) = C_2, \quad (3.6)$$

де \mathbf{V} – швидкість течії, C_1, C_2 – довільні константи.

Рівняння (3.5)–(3.6) повністю описують проблему керування, яка розглядається, в тому сенсі, що вони дозволяють однозначне визначення характеристик циркуляційної течії і параметрів відкачування рідини, при яких забезпечується безвідривне обтікання кутів канавки.

3.4. Побудова модифікованої моделі спійманого вихору

Гідродинамічна задача для визначення характеристик течії ідеальної нестисливої рідини в обмеженій області представлена рівняннями Ейлера з граничною умовою непротікання стінки:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = 0 \quad \text{в } S \times (0, T) \quad (3.7)$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}|_{\partial S} = 0, \quad (3.8)$$

де S — область течії, ∂S — її границя, T — проміжок часу, що розглядається. Крім того, вважаємо, що в початковий момент часу обтікання границі є безвідривним, тобто, скрізь в області виконується:

$$\mathbf{V}|_{t=0} = V_{\infty}, \quad (3.9)$$

де V_{∞} — швидкість потоку на нескінченності.

Оскільки течія, що розглядається, є потенційною (за винятком точки розташування вихору), для розв'язання задачі (3.7)–(3.9) може бути застосований апарат теорії функцій комплексної змінної. Як було показано в розділі 2, граничну умову (3.8) можна задовольнити конформним перетворенням області течії в фізичній площині $z(x, y)$ у півплощину допоміжної площини $\zeta(\xi, \eta)$, де функція Гріна для вихору будується його дзеркальним відображенням відносно стінки (формула (2.62)). Функція $\zeta = \zeta(z)$, яка реалізує вказане перетворення для півплощини з вирізаною циліндричною канавкою, має наступний вигляд [32]:

$$\zeta(z) = a\gamma \frac{1 + \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\gamma}}{1 - \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{\gamma}}, \quad \gamma = \frac{\beta}{\pi - \beta} \quad (3.10)$$

Конфігурація течії у фізичній і канонічній площинах, а також відповідність точок при перетворенні показана на рис. 3.4.

Комплексний потенціал течії у канонічній площині будується

суперпозицією основних потоків і має вигляд:

$$W(\zeta) = V_{\infty\zeta}\zeta + \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \left[\ln(\zeta - \zeta_v) - \ln(\zeta - \bar{\zeta}_v) \right] + \frac{Q(t)}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_q), \quad (3.11)$$

де $V_{\infty\zeta}$, $\zeta_v(\xi_v, \eta_v)$, $\zeta_q(\xi_q, 0)$ — швидкість бічної течії і комплексні координати вихору та стоку в площині ζ відповідно [18, с. 140].

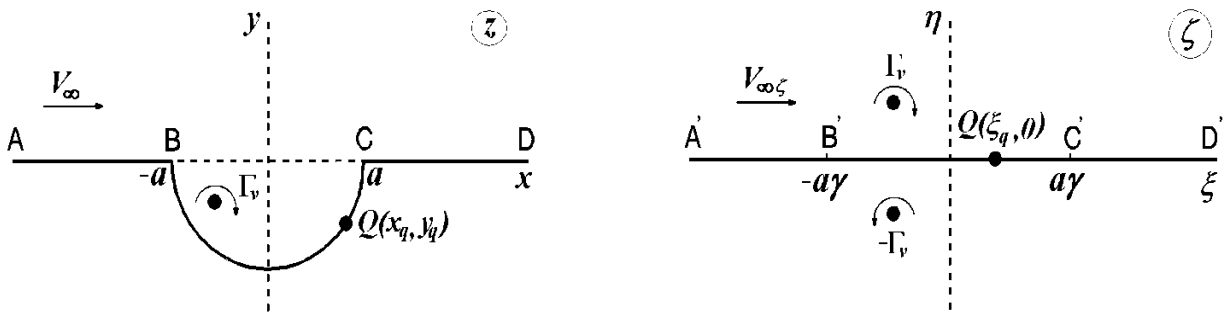


Рис. 3.4. Фізична і канонічна площини для течії над циліндричною канавкою

З інваріантності комплексного потенціалу при конформному перетворенні та властивостей функції (3.10) випливає:

$$V_{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dW}{dz} = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{dW}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = V_{\infty\zeta}. \quad (3.12)$$

Тоді для комплексно-спряженої швидкості точок рідини в площині $z(x, y)$ маємо наступний вираз:

$$\bar{V}(x, y) = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz} = \left(V_{\infty} + \frac{\Gamma_v}{2\pi i} \left[\frac{1}{\zeta - \zeta_v} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_v} \right] + \frac{1}{2\pi} \frac{Q(t)}{\zeta - \zeta_q} \right) \frac{d\zeta}{dz}, \quad (3.13)$$

$$\text{де } \frac{d\zeta}{dz} = 4a^2\gamma^2 \frac{\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^\gamma}{\left[1 - \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^\gamma\right]^2} \cdot \frac{1}{z^2 - a^2}.$$

Як було показано в другому розділі, швидкість вихору при конформному перетворенні повинна обчислюватися з урахуванням поправки Рауфа. Використовуючи (2.65) і (3.13), отримуємо рівняння, яке описує рух заданого вихору у фізичній площині:

$$\frac{d\bar{z}_v}{dt} = \left(V_\infty + \frac{\Gamma_v}{4\pi\eta_v} + \frac{1}{2\pi} \frac{Q(t)}{\zeta_v - \xi_q} \right) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=z_v} + \frac{\Gamma_k}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{z=z_v} \quad (3.14)$$

Крім того, рух вихору в області, що розглядається, відповідає канонічним рівнянням (2.60), де Гамільтоніан H знаходиться на основі теореми Ліня [116]. Позначивши $H^* = \frac{H}{\Gamma_v}$, можемо переписати рівняння

(2.60) наступним чином:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial H^*}{\partial y_k}, \quad \frac{dy_k}{dt} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots, N \quad (3.15)$$

Вигляд функції H^* знаходимо з рівнянь (2.66), (2.67), враховуючи при цьому вплив сингулярності, що моделює джерело/сток інтенсивності $Q(t)$:

$$H^* = V_\infty\eta_v + \frac{\Gamma_v}{4\pi} \ln 2\eta_v + \frac{\Gamma_v}{4\pi} \ln \left| \frac{dz}{d\zeta} \right|_{\zeta=\zeta_v} + \Im \left(\frac{Q(t)}{2\pi} \ln(\zeta_v - \xi_q) \right) \quad (3.16)$$

Рівняння (3.15) означають, що траєкторіями вихору є лінії рівня функції H^* , в той час, як частинки рідини рухаються вздовж ліній течії, тобто, виконується:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{dy}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3.17)$$

де функція течії ψ має знаходитися із наступної системи рівнянь:

$$\begin{cases} \psi = \Im(W(\zeta)) \\ \zeta = \zeta(z). \end{cases} \quad (3.18)$$

Рівняння (3.17) ідентифікують гамільтонову динаміку пасивних частинок в заданому потоці, де координата x відіграє роль положення, координата y відповідає моменту, а функція течії ψ є Гамільтоніаном. Очевидно, що фазовий простір цієї динамічної системи співпадає з фізичною площиною потоку, завдяки чому її фазово-просторова структура може бути легко описана.

Координати вихору, який знаходиться у рівновазі (спійманого вихору), задовольняють рівнянню $\frac{d\bar{z}_v}{dt}$, тобто, виконується:

$$\left(V_\infty + \frac{\Gamma_v}{4\pi\eta_v} + \frac{1}{2\pi} \frac{Q(t)}{\zeta_v - \xi_q} \right) \frac{d\zeta}{dz} \Big|_{z=z_v} + \frac{\Gamma_v}{4\pi i} \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2} / \frac{d\zeta}{dz} \right) \Big|_{z=z_v} = 0 \quad (3.19)$$

Крім того, повинні виконуватися рівняння (3.6) про безвідривне обтікання кутів канавки. Нехай $z_1^* = (-a, 0)$ і $z_2^* = (a, 0)$ – комплексні координати гострих кромek канавки. Тоді умови (3.6) можна записати у наступному вигляді:

$$V\Big|_{z=z_{1,2}^*} = \frac{dW(\zeta)}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz}\Big|_{z=z_{1,2}^*} = const \quad (3.20)$$

Оскільки течія в даному випадку є симетричною, умову Кутта-Жуковського достатньо виконати лише в одній із кромek канавки (в іншій вона буде задовольнятися автоматично), як результат, отримуємо рівняння:

$$\frac{dW(\zeta)}{d\zeta}\Big|_{\zeta=\zeta_{1,2}^*} = 0, \quad (3.21)$$

де $\zeta_{1,2}^* = \zeta(z_{1,2}^*)$ – координати гострих кромek в канонічній площині.

$$V_\infty + \frac{1}{\pi} \frac{\Gamma_v \eta_v}{(\xi_{1,2}^* - \xi_v)^2 + \eta_v^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{Q(t)}{\xi_{1,2}^* - \xi_q} = 0. \quad (3.22)$$

Виділяючи дійсну та уявну частини (3.19) і додаючи два рівняння (3.22), отримуємо контролер, який складається з 4-х рівнянь відносно координат спійманого вихору x_v, y_v , його циркуляції Γ_v , потужності відкачування рідини Q і кутової координати α точки стоку рідини. Для того, щоб ця система була замкненою, один із цих параметрів потрібно зафіксувати.

Зазначимо також, що задача розглядається у безрозмірному вигляді, де за характерні параметри покладені півхорда канавки a і швидкість незбуреної течії V_∞ так, що $\bar{x} = \frac{x}{a}$, $\bar{y} = \frac{y}{a}$, $\bar{t} = tV_\infty/a$, $\bar{\Gamma}_v = \frac{\Gamma_v}{aV_\infty}$, $\bar{Q} = \frac{Q}{aV_\infty}$ (надалі риси, що позначають безрозмірні величини, будемо пропускати).

3.5. Параметричне керування пристінною течією в канавці

Розглянемо випадок параметричного керування течією в канавці, коли $Q = 0$, тобто відкачування рідини відсутнє. В цьому випадку течія складається з бічного потоку одиничної швидкості і вихору, який моделює циркуляційну зону в циліндричній канавці. Виключивши з рівняння (3.19) вплив стоку, умову стаціонарності вихору можна переписати наступним чином:

$$\left(1 + \frac{\Gamma_v}{4\pi \eta_v}\right) \left[\left(\frac{d\zeta}{dz}\right)^2 / \left(\frac{d^2\zeta}{dz^2}\right) \right] \bigg|_{z=z_v} - \frac{i\Gamma_v}{4\pi} = 0. \quad (3.23)$$

Оскільки течія в даному випадку є симетричною, умову Кутта-Жуковського достатньо виконати лише в одній із кромek канавки (в іншій вона буде задовольнятися автоматично), як результат, отримуємо рівняння:

$$\pi + \frac{\Gamma_v \eta_v}{(\xi_1^* - \xi_v)^2 + \eta_v^2} = 0. \quad (3.24)$$

Трансцендентні рівняння (3.23), (3.24) розраховуються чисельно методом січних. Отримано, що при взаємодії вихору з прямолінійною зовнішньою течією в області, що обмежена стінкою із циліндричною канавкою, існують три точки, в яких швидкість спійманого вихору дорівнює нулю. Дві з них знаходяться поблизу кутів канавки, а остання – на її осі.

Дослідження стійкості отриманих розв'язків зводиться до аналізу власних чисел матриці:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

в стаціонарних точках, (v_x, v_y) – компоненти швидкості вихору. Цей аналіз виявив, що стаціонарні точки, що прилягають до кутів канавки, є нестійкими фокусами. Очевидно, що потік з такими вихорами не реалізується на практиці. Точка, що лежить на осі канавки, є еліптичною, тобто, характеризується двома суто уявними спряженими власними числами. Вихор, що відповідає цій точці, обертається у її малому околі з частотою, яка дорівнює власному значенню, тому, останнє можна вважати частотою спійманого вихору.

В роботі одержані залежності параметрів спійманого вихору – координати y_v , циркуляції Γ_v і частоти ω_0 , від геометрії канавки, яка характеризується кутом β .

На рис. 3.5 представлено функцію $y_v(\beta)$, для кращої інтерпретації результатів також наведено залежність від кута β глибини канавки h . З графіків можна бачити, зокрема, що в мілких канавках (при $\beta \leq 80^\circ$) спійманий вихор розташовується вище горизонтальної стінки. Цей факт дозволяє використовувати мілкі канавки для створення у пристінній течії так званої «вихрової змазки», коли турбулентний граничний шар замінюється системою регулярних вихорів.

На рис. 3.6 наведені функції $\Gamma_v(\beta)$ (крива 1) і $\omega_0(\beta)$ (крива 2). З цих графіків випливає, що циркуляція спійманого вихору Γ_v є приблизно постійною в мілких та середніх канавках і різко зростає в глибоких канавках (при $\beta > 90^\circ$).

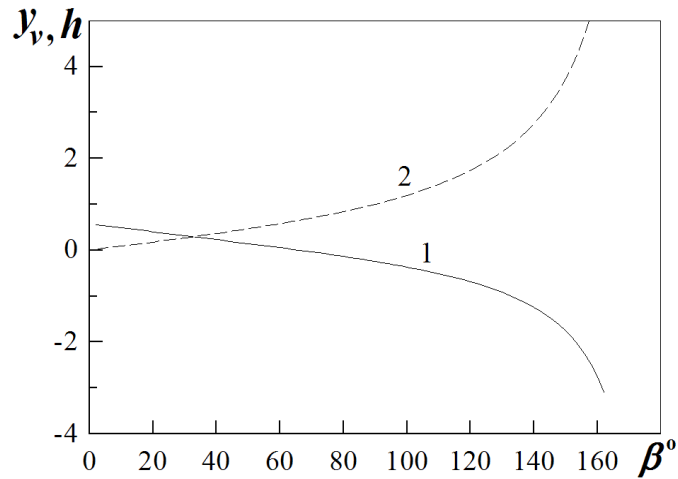


Рис. 3.5. Залежності координати спійманого вихору y_v (крива 1) і глибини канавки h (крива 2) від кута β

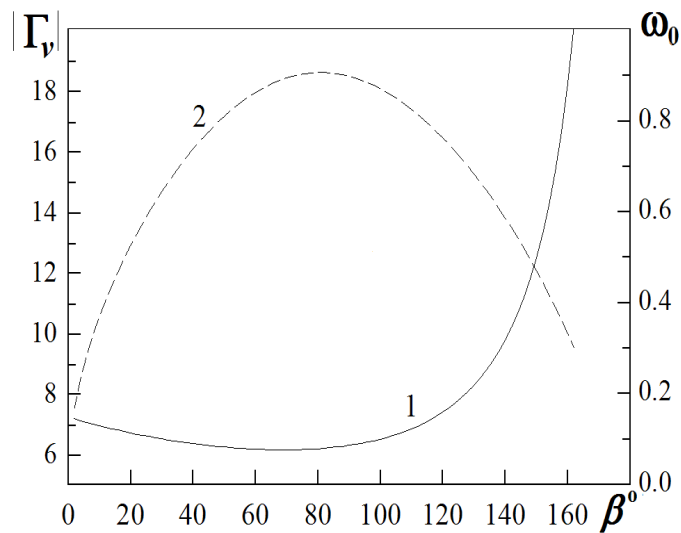


Рис 3.6. Залежності циркуляції спійманого вихору Γ_v (крива 1) і його частоти ω_0 (крива 2) від кута β

Частота спійманого вихору ω_0 спочатку зростає при збільшенні глибини канавки, а потім падає. Локальний максимум функції $\omega_0(\beta)$ досягається при $\beta = 90^\circ$, тобто, коли глибина канавки дорівнює половині її ширини.

З рівнянь руху вихору (3.15) випливає, що фазові криві для знайденого вихору є лініями рівня функції H^* , визначеною формулою (3.16) при $Q = 0$.

Одержаний портрет його траєкторій у циліндричній канавці (рис. 3.7) демонструє лінії різних типів; вони пов'язані як зі стійкою стаціонарною точкою, що лежить на осі, так і з двома гіперболічними точками типу «сідло», розташованими над кутами канавки. З цього випливає, що при незначних відхиленнях від точки рівноваги вихор буде рухатися навколо свого стаціонарного положення, але при значних збуреннях він може перейти через сепаратрису між різними траєкторіями і «вимитися» з канавки.

Якщо вихор знаходиться у положенні рівноваги, то конфігурація потоку з часом не змінюється, і система рівнянь (3.17), які описують рух частинок рідини, є автономною та інтегрованою. Лінії течії, що відповідають цьому випадку, представлені на рис. 3.8. Вони свідчать про регулярний характер руху рідини навколо спійманого вихору. Але як тільки він відхиляється від точки рівноваги і починає рухатися, система (3.17) перестає

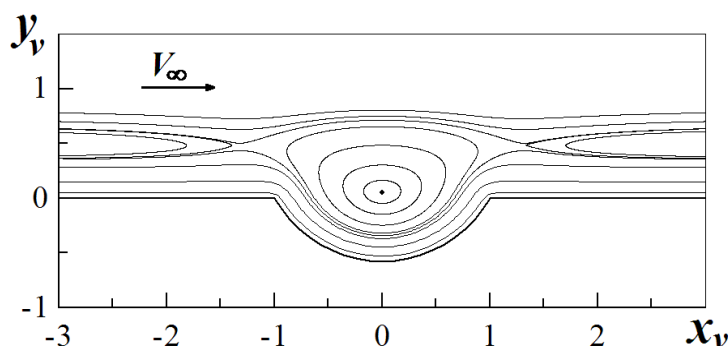


Рис. 3.7. Фазовий портрет траєкторій спійманого вихору при $\beta = 60^\circ$

бути автономною, оскільки її права частина залежить від положення вихору. Тоді в потоці можливе виникнення хаотичних процесів відносно частинок рідини. Передумовою хаотичного перемішування в збуреній системі є також наявність гетероклінної орбіти на фазовому портреті частинок рідини (рис. 3.8). Вона з'єднує гострі кромки циліндричної канавки і розділяє траєкторії різних типів – замкнені криві навколо вихору та траєкторії поступального руху частинок рідини.

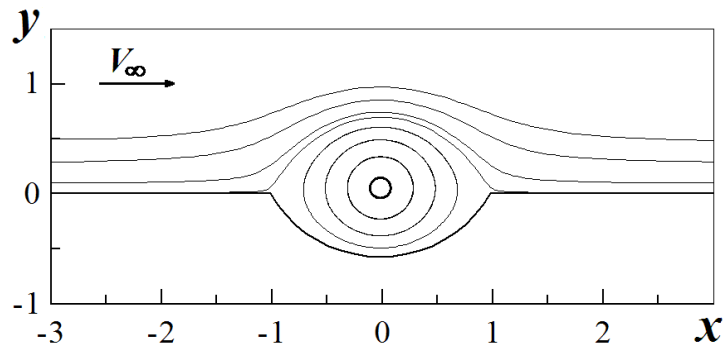


Рис. 3.8. Лінії течії при обтіканні спійманого вихору в канавці при $\beta = 60^\circ$

3.6. Властивості спійманих вихорів у збуреному потоці

В реальності пристінні потоки є неоднорідними. Існує багато факторів, через які течія може стати нестационарною, наприклад, вібрації тіла, переміщення турбулентних плям, зовнішніх вихорів та ін. Часто вони мають періодичну складову, що може призвести до резонансних навантажень на гідродинамічну систему, що розглядається. Очевидно, що ця реакція зумовлена наявністю у спійманого вихору власної частоти ω_0 , яка визначає обертальний рух цього вихору в малому околі стаціонарної точки.

В цьому підрозділі буде досліджена поведінка спійманого вихору в канавці у періодично збуреному потоці. Покладаємо, що швидкість зовнішньої течії коливається за періодичним законом, так що:

$$V(t) = V_\infty (1 + \varepsilon \sin \Omega t), \quad \varepsilon \ll 1, \quad (3.25)$$

де ε – амплітуда, Ω – частота коливань.

Вважаємо, що в початковий момент часу $t = 0$ спійманий вихор з циркуляцією Γ_v і координатами (x_v, y_v) розташований в стійкій стаціонарній точці (x_0, y_0) . Його траєкторія у нестационарному потоці знаходиться

чисельно інтегруванням рівнянь руху (3.14) методом Рунге-Кутта 4-го порядку. Кількісними характеристиками процесу є функція

$$R(t) = \sqrt{(x_v(t) - x_0)^2 + (y_v(t) - y_0)^2}, \quad (3.26)$$

що описує поточне відхилення вихору від точки рівноваги, та її максимальне значення

$$R_{\max} = \max\{R(t), t \in (0, T)\} \text{ де } T \rightarrow \infty, \quad (3.27)$$

яке представляє собою амплітуду коливань вихору під дією зовнішніх збурень.

Розрахунки показують, що характер руху заданого вихору в потоці, що коливається, суттєво залежить від відношення частоти зовнішніх збурень Ω до частоти вихору ω_0 . Якщо Ω значно відрізняється від ω_0 , вихор рухається в околі точки рівноваги по замкнених траєкторіях. Очевидно, що такі зовнішні збурення не є загрозливими з точки зору втрати стійкості системи.

Якщо $\Omega \rightarrow \omega_0$, амплітуда прецесії вихору швидко збільшується, а траєкторії ускладнюються, тому цей випадок потребує окремого вивчення. На рис. 3.9, 3.10 представлені траєкторія і відхилення заданого вихору від точки рівноваги в мілкій канавці ($\beta = 60^\circ$) розраховані у збуреному потоці при $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$, $\varepsilon = 0,01$.

На рис. 3.9 можна бачити, що вихор рухається періодично по замкненій траєкторії, яка починається і закінчується в точці рівноваги. Рис. 3.10 свідчить, що рух вихору характеризується багатоперіодичністю. Отримані результати показують, що залежність амплітуди коливань спійманого вихору у збуреному потоці від співвідношення зовнішньої і внутрішньої частот системи носить резонансний характер. Це проявляється в тому, що амплітуда прецесії вихору R_{\max} досягає найбільших значень при $\Omega \approx \omega_0$, крім того, її

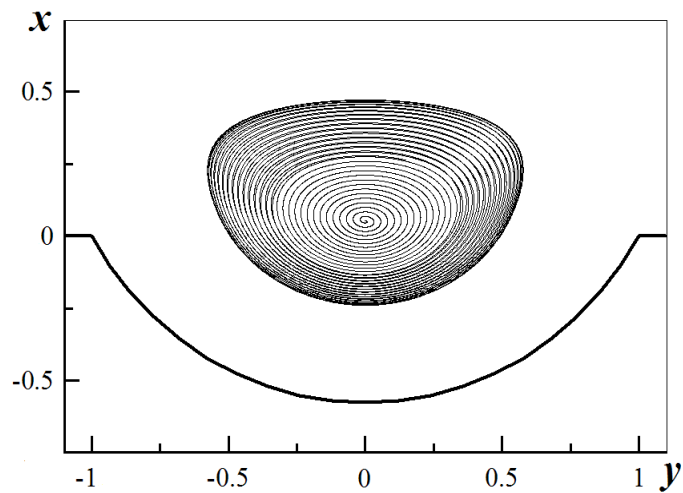


Рис. 3.9. Траєкторія спійманого вихору у збуреному потоці при

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 1, \varepsilon = 0,01, \beta = 60^\circ$$

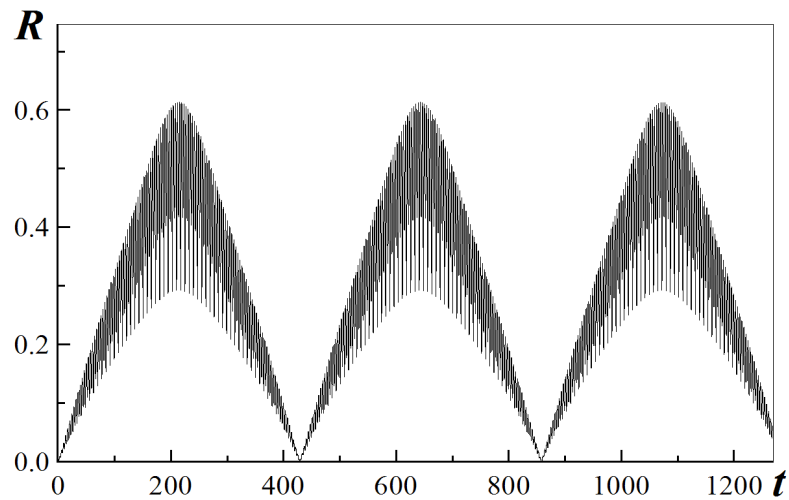


Рис. 3.10. Відхилення спійманого вихору від точки рівноваги у збуреному

$$\text{потоці при } \frac{\Omega}{\omega_0} = 1, \varepsilon = 0,01, \beta = 60^\circ$$

локальні максимуми спостерігаються також на субгармоніках власної частоти. Про це свідчать результати розрахунків, представлені на рис. 3.11, 3.12.

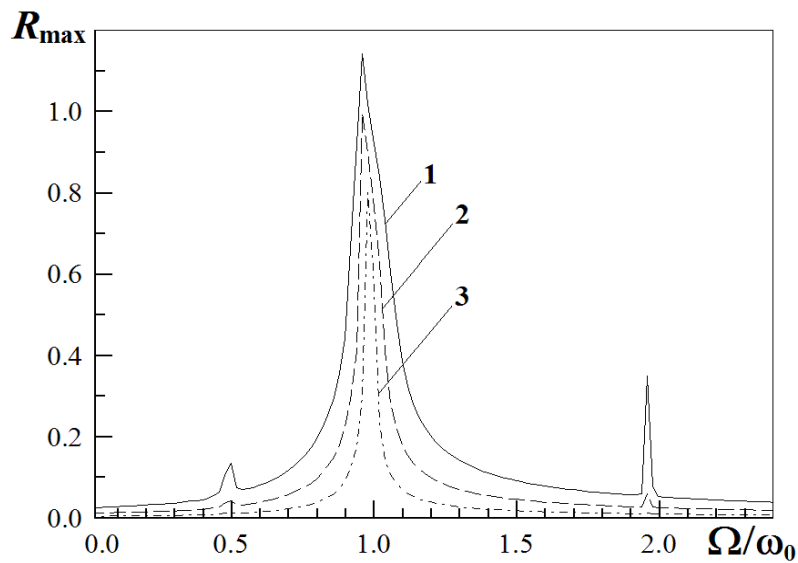


Рис. 3.11. Функція $R_{max}(\frac{\Omega}{\omega_0})$ в мілкій канавці ($\beta = 60^\circ$) при різних амплітудах зовнішніх збурень крива 1 – $\varepsilon = 0,05$, крива 2 – $\varepsilon = 0,025$, крива 3 – $\varepsilon = 0,01$

Криві, наведені на рис. 3.11, характеризують функцію $R_{max}(\frac{\Omega}{\omega_0})$ в мілкій канавці ($\beta = 60^\circ$) при різних значеннях амплітуди коливань потоку ε : 1 – $\varepsilon = 0,05$, 2 – $\varepsilon = 0,025$, 3 – $\varepsilon = 0,01$. Вони вказують на те, що реакція системи на зовнішні збурення суттєво залежить від їх інтенсивності.

Рис. 3.12 ілюструє залежність функції $R_{max}(\frac{\Omega}{\omega_0})$ від геометрії канавки, яка характеризується кутом β : 1 – $\beta = 10^\circ$, 2 – $\beta = 30^\circ$, 3 – $\beta = 150^\circ$. З графіка можна бачити, що амплітуда прецесії вихору в мілких канавках є набагато вищою, ніж в глибоких. Цей ефект зумовлений тим, що в першому випадку спійманий вихор розташований вище стінки, і вплив потоку на нього є набагато сильнішим, ніж тоді, коли він знаходиться всередині канавки. Слід відзначити, що при зменшенні глибини канавки пік резонансної кривої зміщується від одиниці в бік менших значень величини $\frac{\Omega}{\omega_0}$. Так, при $\beta = 10^\circ$ максимальне значення амплітуди прецесії спійманого вихору досягається при

$$\frac{\Omega}{\omega_0} = 0.9.$$

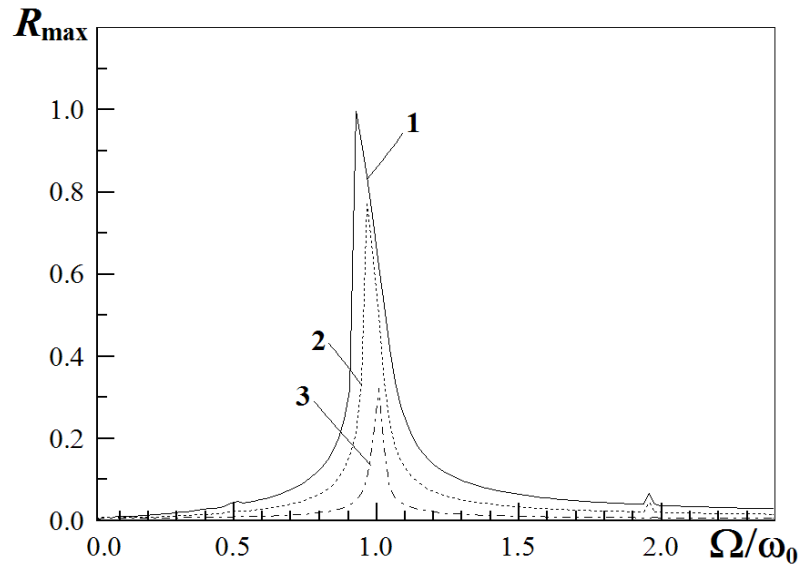


Рис. 3.12. Функція $R_{max}(\frac{\Omega}{\omega_0})$ для різних канавок при $\varepsilon = 0,01$: крива 1 – $\beta = 10^\circ$, крива 2 – $\beta = 30^\circ$, крива 3 – $\beta = 150^\circ$

Траєкторії спійманого вихору при резонансних коливаннях потоку для мілкої і глибокої циліндричних канавок представлені на рис. 3.13 і рис. 3.14 відповідно. З рисунків 3.13, 3.14, 3.9, 3.10 випливає, що траєкторії вихору у збуреному потоці відображають геометричну конфігурацію канавки.

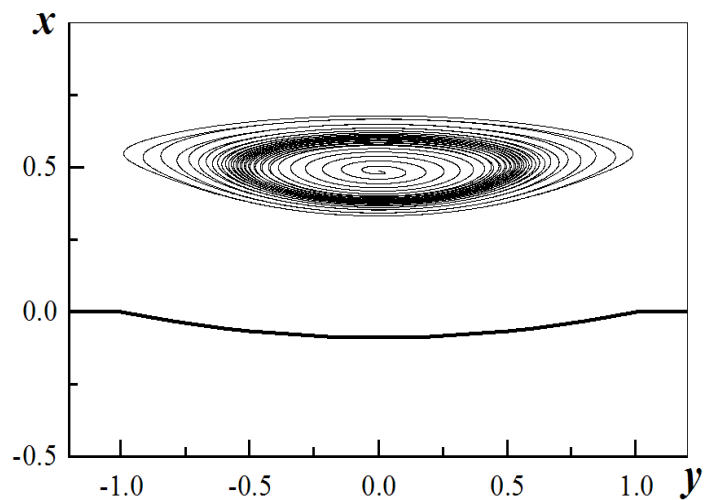


Рис. 3.13. Траєкторія спійманого вихору при резонансних збуреннях зовнішньої течії в канавці при $\beta = 10^\circ$

Значні збурення потоку можуть призвести до втрати стійкості вихору , через що він може вийти із канавки у потік (рис. 3.15). В цьому випадку відбувається перехід вихору через сепаратису .

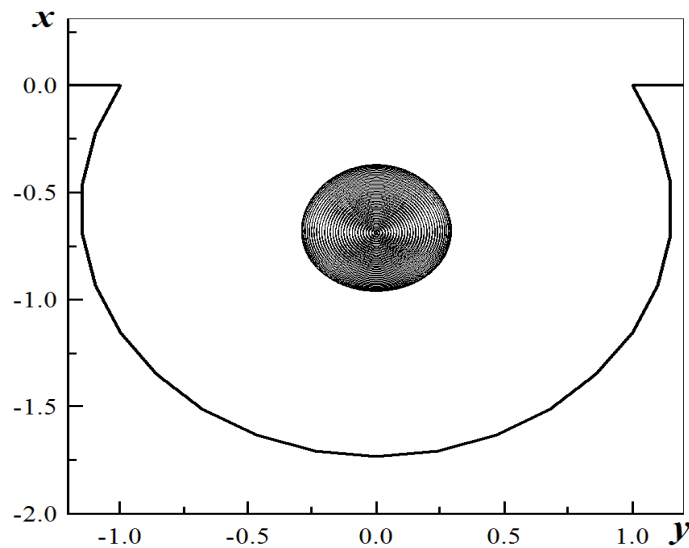


Рис. 3.14 Траєкторія спійманого вихору при резонансних збуреннях зовнішньої течії в канавці при $\beta = 150^\circ$

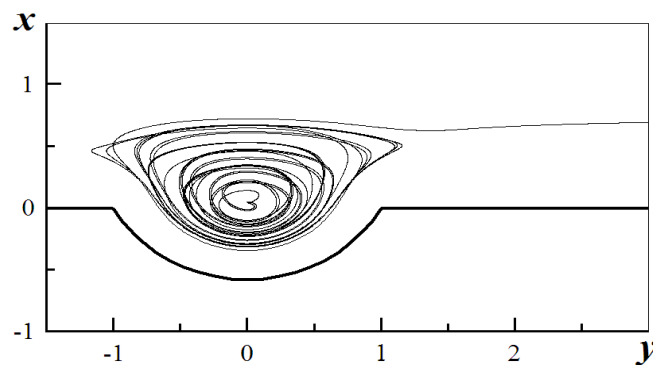


Рис. 3.15. Траєкторія спійманого вихору при $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$, $\varepsilon = 0,1$, ($\beta = 60^\circ$)

Наведені результати показують, що малі періодичні коливання зовнішньої течії генерують багаточастотні рухи спійманого вихору з великими амплітудами, що є наслідком нелінійної природи рівнянь динаміки вихору в області зі складною границею. Оскільки координати спійманого вихору (x_v, y_v) , є тепер функціями часу, то рівняння (3.17), (3.18), які

описують рух частинок рідини в полі цього вихору, стають неавтономними. Це означає, що поведінка пасивних частинок є непередбачуваною і виявляє високу чутливість до початкових умов, що є передумовою виникнення в системі лагранжевого хаосу [45]. У стаціонарному потоці зі спійманим вихором пасивні частинки рідини або обертаються або рухаються поступально по гладких траєкторіях. У потоці, що коливається, рух частинок рідини, які знаходяться поблизу спійманого вихору, істотно ускладнюється.

Для дослідження руху спійманого вихору і прилягаючих до нього частинок рідини у збуреному потоці побудовано перетини Пуанкаре, на яких фіксується положення вихору і частинки рідини через період вимушених коливань, тобто, в моменти часу $t_n = nT$, де $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, $n = 1, 2, \dots$

На рис. 3.16 відповідні перетини наведені при різних відношеннях частоти зовнішніх збурень до частоти вихору $\frac{\Omega}{\omega_0}$ в канавці з $\beta = 60^\circ$ (чорним кольором показані положення вихору, синім – частинки рідини).

В початковий момент часу частинка рідини знаходиться в околі вихору, так що їхні радіус-вектори пов'язані співвідношенням: $r_i = r_v - 0.2$. Можна бачити, що поки частота зовнішніх збурень Ω відрізняється від внутрішньої частоти системи ω_0 , рухи вихору і частинки є регулярними (рис. 3.16 а, б). При цьому, траєкторія вихору стягується в точку, а перетин Пуанкаре для пасивної частинки має вигляд кільця, товщина якого збільшується при $\Omega \rightarrow \omega_0$. Коли Ω є близьким до ω_0 (3.16 в, г), рухи вихору і частинки значно ускладнюються, а при $\Omega \approx \omega_0$ рух частинки хаотизується (рис. 3.16 д). До того ж суттєво розширюється область, в якій проявляється ця частинка.

Ще однією важливою кількісною характеристикою динамічних систем є максимальний показник Ляпунова λ_L , який визначає ступінь віддалення різних, але близьких траєкторій заданої системи на нескінченності. Ним

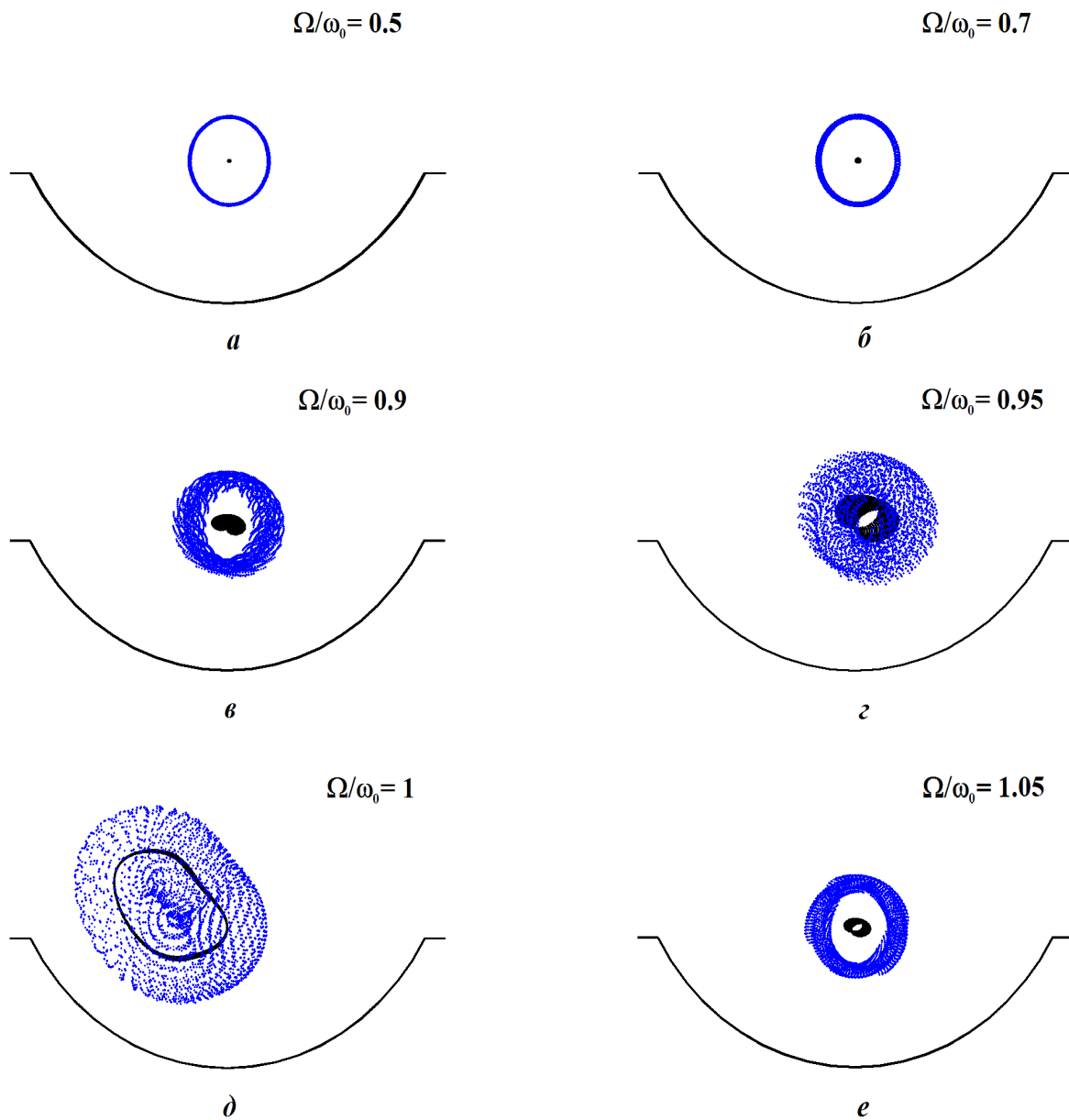


Рис. 3.16. Перетини Пуанкаре спійманого вихору і частинки рідини у збуреному потоці: чорні крапки – положення вихору, сині – частинки ($\beta = 60^\circ$)

описується залежність поведінки системи від початкових умов:

$$\lambda_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\mathbf{z}(t)|}{|\mathbf{z}(0)|}, \quad (3.28)$$

де $\mathbf{z}(t)$ – вектор, який зв’язує дві близькі траєкторії. Регулярна поведінка об’єктів в Гамільтонових системах, таких, як (3.15) або (3.17), пов’язана з $\lambda_L = 0$, для систем з хаотичною динамікою маємо $\lambda_L > 0$.

В роботі методом Бенеттіна [50] розраховувався показник λ_L для частинок рідини, які знаходяться в околі спійманого вихору у потоці, що коливається. Рис. 3.17 ілюструє коефіцієнти для частинки, перетини Пуанкаре якої показані на рис. 3.16 ($\beta = 60^\circ$, $r_t = r_v - 0.2$), при різній частоті зовнішніх коливань. На графіку бачимо, якщо при $\frac{\Omega}{\omega_0} = 0.5$ (крива 1) максимальний показник Ляпунова з часом прямує до нуля, то при $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$ він коливається навколо певного додатного значення, що свідчить про хаотизацію руху частинок рідини в околі спійманого вихору.

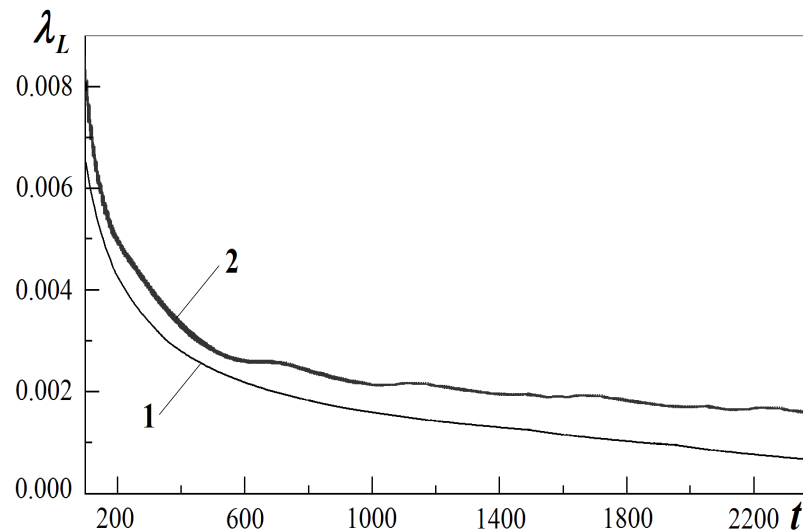


Рис. 3.17. Максимальний показник Ляпунова для частинки рідини у

збуреному потоці: крива 1 – $\frac{\Omega}{\omega_0} = 0.5$, крива 2 – $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$, ($\beta = 60^\circ$)

Таким чином, бачимо, що при пасивному застосуванні циліндричних канавок для керування пристінною течією, реакція спійманого вихору на періодичні зовнішні збурення може призвести до суттєвих ускладнень у

потоці, через що керування стає неефективним. Способи, що застосовуються для поліпшення стійкості спійманого вихору в канавці, будуть розглянуті у наступних підрозділах роботи.

3.7 Детерміноване керування циркуляційною течією в канавці

Одним зі способів поліпшення стійкості спійманого вихору є застосування відкачування та вприскування рідини. Розглянемо випадок детермінованого керування пристінною течією в канавці, коли потужність відкачування рідини є сталою, $Q = const$. Розглянемо як змінюється топологія течії в канавці, коли на її стінці реалізується відкачування або вприскування рідини.

Якщо координату спійманого вихору x_v вважати заданою, то інша його координата y_v , циркуляція Γ_v , а також інтенсивність Q і положення точки відкачування рідини α обчислюються однозначно з рівнянь (3.19), (3.22). Стаціонарні криві, пораховані для канавок різної форми, показані на рис. 3.18, 3.19, 3.20. Кожній точці цієї кривої відповідає вихор, який не рухається і задовольняє умову про безвідривне обтікання кромки канавки. Залежності циркуляції спійманого вихору Γ_v та потужності відкачування рідини Q від координати x представлені на рис. 3.21, 3.22 відповідно.

Аналіз власних чисел матриці лінеаризованої системи рівнянь (3.19), (3.22) виявив наступні топологічні моди спійманого вихору:

- 1) стійкий фокус, якому відповідають спряжені власні числа з від'ємною дійсною частиною;
- 2) нестійкий фокус, коли дійсні частини обох власних чисел є додатними;
- 3) сідло, для якого властиві протилежні за знаком дійсні власні числа.

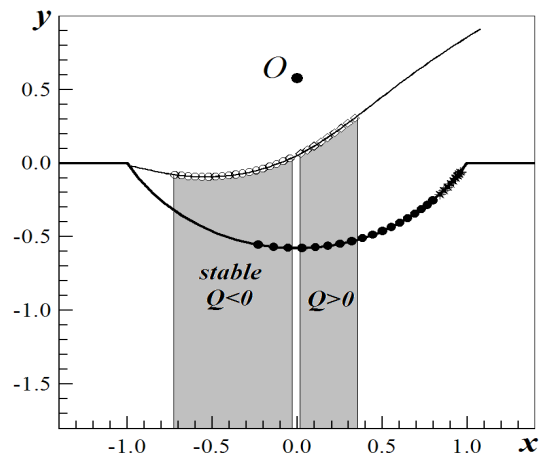


Рис. 3.18. Положення спійманих вихорів в канавці при $\beta = 60^\circ$

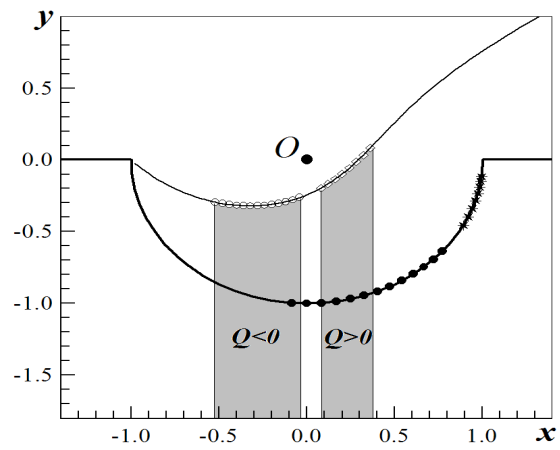


Рис. 3.19. Положення спійманих вихорів в канавці при $\beta = 90^\circ$

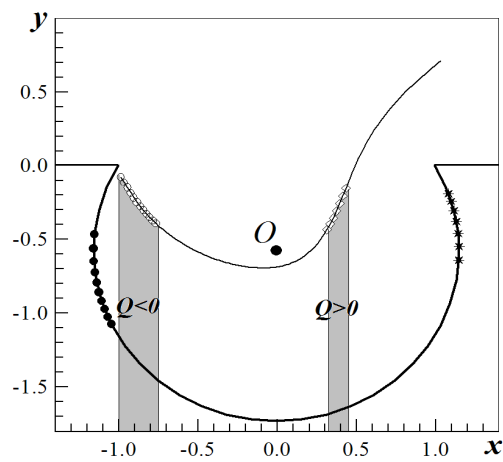


Рис. 3.20. Положення спійманих вихорів в канавці при $\beta = 120^\circ$

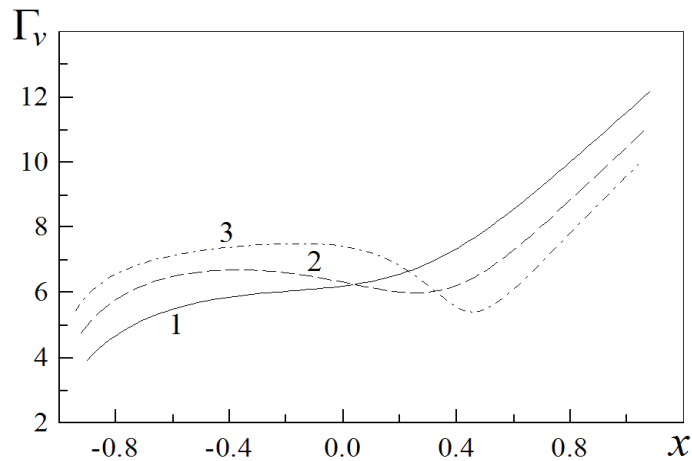


Рис. 3.21. Циркуляція спійманих вихорів $\Gamma_v(x)$ в канавках різної глибини: 1 – $\beta = 60^\circ$, 2 – $\beta = 90^\circ$, 3 – $\beta = 120^\circ$

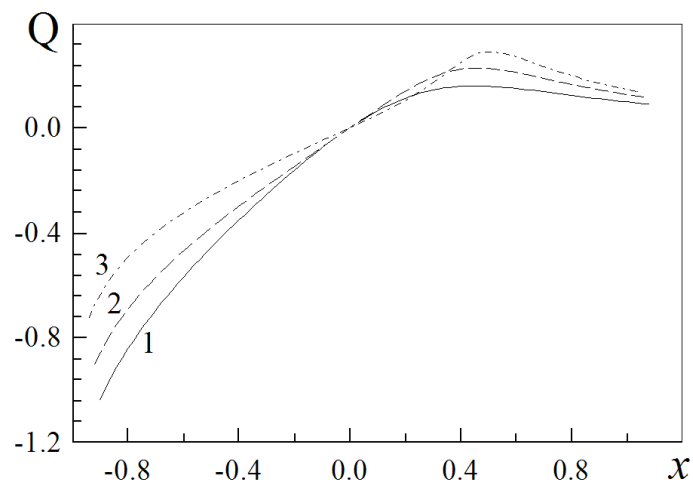


Рис. 3.22. Потужність відкачування рідини $Q(x)$ в канавках різної глибини: 1 – $\beta = 60^\circ$, 2 – $\beta = 90^\circ$, 3 – $\beta = 120^\circ$

На рис. 3.18, 3.19, 3.20 області стійкості вихору затемнені. В мілких канавках вони ширші і розташовані в центральній частині (рис. 3.18, 3.19). В глибоких канавках (рис. 3.20) області стійких вихорів звужуються і переміщуються до крамок. Такі результати свідчать про те, що неглибокі циліндричні канавки є більш перспективними з точки зору створення стійких циркуляційних областей в пристінному потоці. Кожному вихору зі стаціонарної кривої відповідають свої положення та потужність відкачування

рідини. На рис. 3.22 видно, що стійкість циркуляційної області може бути досягнута не лише відкачуванням, а й вприскуванням рідини в канавку. Розраховані положення точок відкачування-вприскування рідини, які відповідають стійким спійманим вихорам, на рис. 3.18, 3.19, 3.20 показані маркерами на границях канавок (\bullet – $Q < 0$, $*$ – $Q > 0$). Лінії течії зі спійманим вихором та відкачуванням або вприскуванням рідини представлені на рис. 3.23, 3.24 відповідно.

Рис. 3.23 вказує на наявність достатньо широкого шару рідини, яка засмоктується керуючим пристроєм. Розділяючи циркуляційну зону і зовнішній потік, цей шар підтримує стійку вихрову конфігурацію в області.

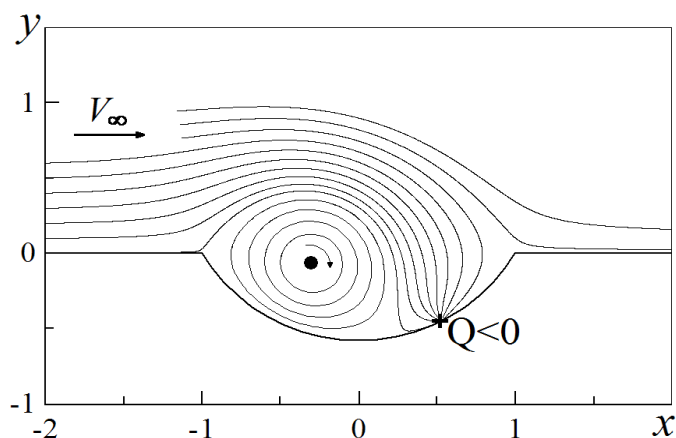


Рис. 3.23. Лінії течії при обтіканні спійманого вихору в канавці ($\beta = 60^\circ$) при відкачуванні рідини

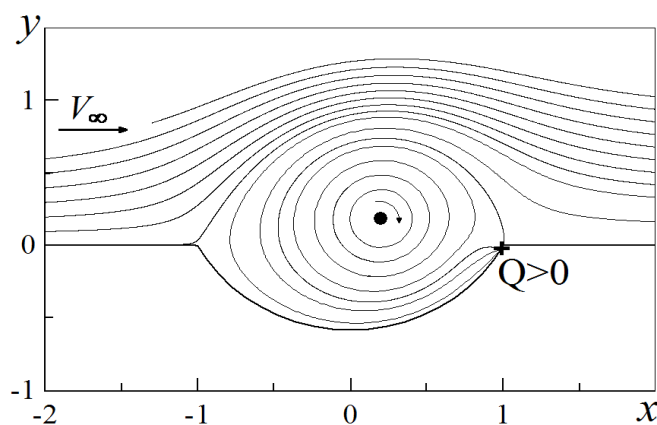


Рис. 3.24. Лінії течії при обтіканні спійманого вихору в канавці ($\beta = 60^\circ$) при вприскуванні рідини

Розміри циркуляційної області суттєво зменшуються у порівнянні з некерованим потоком. Лінії течії на рис. 3.24 свідчать про те, що рідина, яка вприскується у канавку, закручується навколо вихору, тим самим, підсилюючи його і збільшуючи розміри циркуляційної зони відносно некерованого випадку. Інтенсивність притягання чи відштовхування вихору відносно стаціонарної точки визначається дійсною частиною власних чисел. Одержані в розрахунках значення λ_r в області стійкого фокусу мають порядок 10^{-2} при відкачуванні рідини і 10^{-4} при її вприскуванні. Із цього факту, а також з аналізу рис. 3.23 випливає, що відкачування рідини забезпечує більш стійку вихрову конфігурацію в канавці, ніж вприскування і є більш перспективним для керування течією.

Результати, отримані вище, показують, що зовнішні збурення потоку, які мають періодичну складову, можуть призвести до резонансних навантажень на гідродинамічну систему, що розглядається. Реакція спійманого вихору на періодичні збурення в канавці з відкачуванням (вприскуванням) рідини визначається уявною частиною власних чисел (частотою спійманого вихору). Результати розрахунків (рис. 3.25) показують,

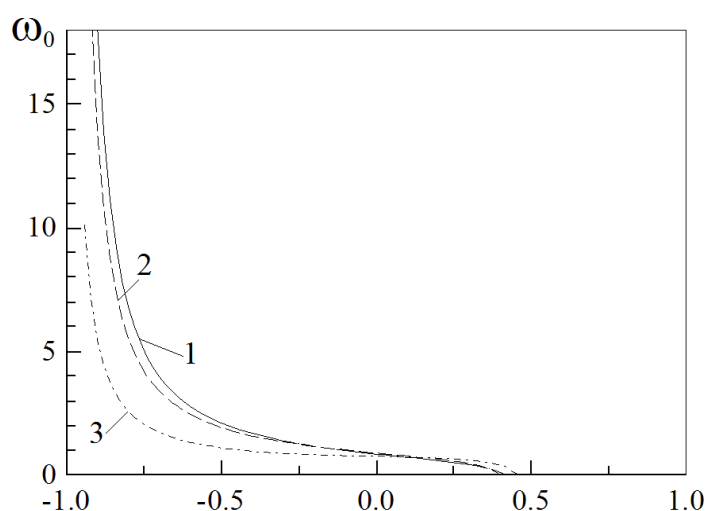


Рис. 3.25. Частота спійманих вихорів $\omega_0(x)$ в циліндричних канавках різної глибини: 1) $\beta = 60^\circ$, 2) $\beta = 90^\circ$, 3) $\beta = 120^\circ$

що відкачування рідини призводить до суттєвого збільшення ω_0 у порівнянні з некерованим випадком, при вприскуванні рідини ця величина зменшується.

На рис. 3.26 представлені траєкторії двох вихорів в мілкій канавці ($\beta = 60^\circ$), розраховані при $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$. Вихори рухаються по замкнених періодичних траєкторіях з початком і закінченням у стаціонарній точці.

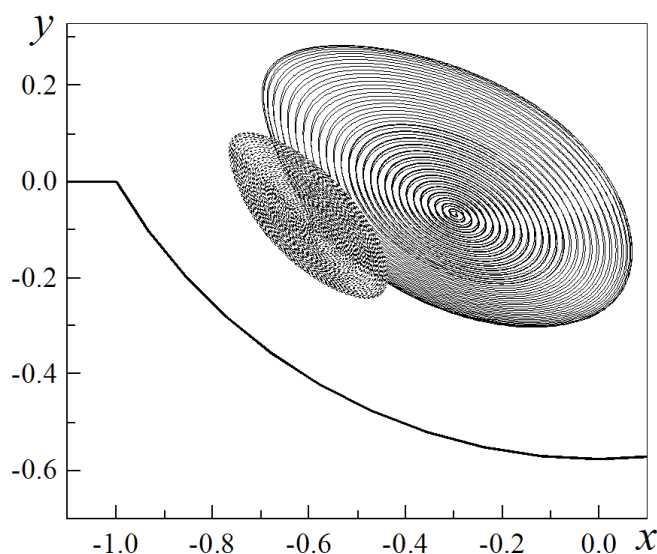


Рис. 3.26. Траєкторії спійманого вихору в мілкій ($\beta = 60^\circ$) канавці у

збуреному потоці: $\varepsilon = 0,01$, $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$, $x_v = -0,3$, $y_v = -0,6$

Малій траєкторії на рис. 3.26 відповідає значення $Q = -0,55$, великій — $Q = -0,25$. Частотні характеристики руху вихору у резонансно збуреному потоці можуть бути одержані з аналізу функції $R(t)$. Як видно на рис. 3.27, на основну траєкторію тут накладаються високочастотні пульсації. Їх частота дорівнює 2Ω .

Низька частота, що відповідає коливанням вихору з великою амплітудою, пов'язана з частотою зовнішньої дії співвідношенням $\frac{\Omega}{50}$. Аналіз показує, що одержані характеристики є однаковими для всіх вихорів зі стаціонарної кривої, яка відповідає заданій глибині канавки. Таким чином,

малі резонансні збурення зовнішньої течії генерують низькочастотні рухи вихору з великими амплітудами і високочастотні коливання. Як перші, так і другі, пов'язані певними співвідношеннями з частотою зовнішньої дії, тобто, є її субгармоніками. Очевидно, що генерація субгармонік в цій коливальній системі є наслідком її внутрішніх закономірностей, які зумовлені нелінійною природою рівнянь динаміки вихору в пристінній області.

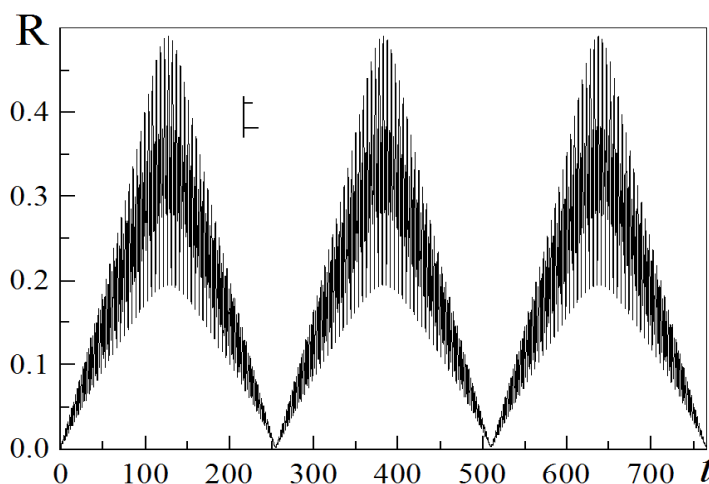


Рис. 3.27. Відхилення спійманого вихору від рівноважного положення у

збуреному потоці: $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$, $x_v = -0,3$, $\varepsilon = 0,01$

На рис. 3.28 представлені залежності максимального відхилення вихору R_{max} у збуреному потоці від відношення вимушеної частоти Ω до власної частоти системи ω_0 при різних конфігураціях поля течії в канавці (без відкачування рідини і з відкачуванням різної інтенсивності). Максимальне відхилення вихору від стаціонарної точки R_{max} обернено пропорційне до потужності відкачування рідини, яка відповідає заданим початковим координатам вихору (рис. 3.28). Можна бачити, що всі три криві мають різко виражений резонансний характер, але, якщо в некерованому потоці амплітуда коливань вихору R_{max} співмірна із розмірами заглиблення (крива 3), то застосування відкачування рідини призводить до її суттєвого

зменшення (криві 1, 2).

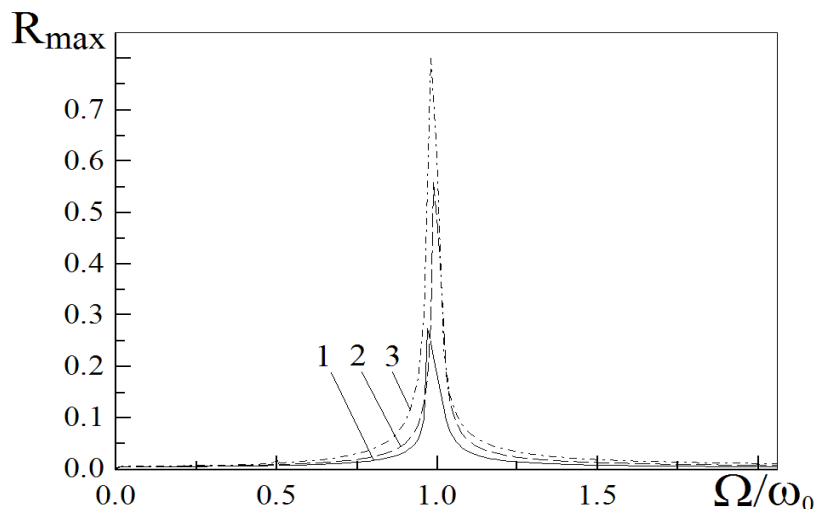


Рис. 3.28. Залежності амплітуди вихрового руху R_{max} від частоти зовнішніх збурень при різних потужностях відкачування рідини: 1) $x_v = -0,6$, $Q = -0,55$; 2) $x_v = -0,3$, $Q = -0,25$; 3) $x_v = 0$, $Q = 0$

На рис. 3.29 показано траєкторії, по яких буде рухатися спійманий вихор в керуючій схемі з відкачуванням рідини у випадку відхилення його від рівноважного положення. Вона свідчить про те, що відкачування рідини перешкоджає виносу вихору з канавки в напрямку течії. Але, крім замкнутих обертальних траєкторій навколо стійкої стаціонарної точки, тут існують параболічні криві, зумовлені наявністю нестійкої особливості над переднім

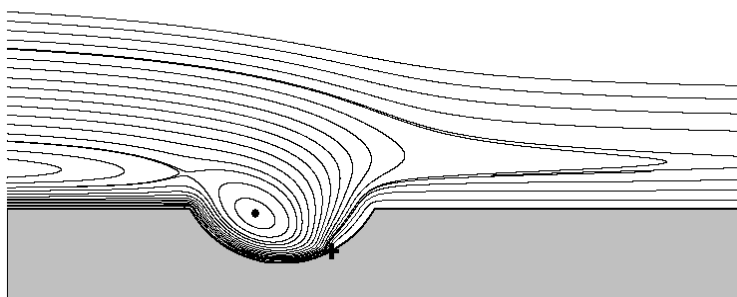


Рис. 3.29. Фазовий портрет траєкторій спійманого вихору в канавці з відкачуванням рідини ($\beta = 60^\circ$), \cdot – стійка точка рівноваги, $+$ – положення стоку

кутом канавки, по яких вихор може рухатися проти течії. Для того, щоб стабілізувати вихор в околі стійкої стаціонарної точки і не дати йому перейти через сепаратису, яка розділяє траєкторії різних типів, має застосовуватися активне керування зі зворотним зв'язком, коли параметри керуючого пристрою вибираються в залежності від змін у потоці.

3.8 Реактивне керування циркуляційною течією зі зворотним зв'язком

Рух спійманого вихору з великими амплітудами, який виникає при збуреннях його початкового положення, призводить до порушення умови безвідривного обтікання кутів канавки, і вони стають генераторами вихрових шарів. В цьому разі не досягається головна мета керування – мінімізація вихроутворення на границях області течії. Для стабілізації вихору у збуреному потоці має застосовуватися активна керуюча схема, в якій потужність відкачування рідини реагує на зміну зовнішніх умов, $Q = Q(t)$.

Існують різні підходи до керування циркуляційною течією в пристінному потоці за допомогою відкачування рідини. В роботі [65] з метою керування слідом за вертикальною пластиною контролюється сумарна циркуляція, яка сходить в потік в гострих кромках. В роботі пропонується відслідковувати положення спійманого вихору, так, щоб при збуреннях зовнішньої течії забезпечувалося виконання умови безвідривного обтікання кутів канавки. Для розрахунку нових координат спійманого вихору і потужності відкачування рідини в цій схемі застосовується контролер, що складається з рівнянь (3.19), (3.22). Якщо за початкові дані взяти параметри спійманого вихору і точки стоку, відомі зі стаціонарного розв'язку, то розв'язання цих рівнянь за наявності збурень дозволить отримати реакцію системи на зміни зовнішніх умов.

Реалізація керування буде більш зручною, якщо зафіксувати

положення стоку (кут α) і кількість завихреності в канавці, тобто, циркуляцію спійманого вихору Γ_v . Для розрахунку координат спійманого вихору x_v , y_v , і потужності відкачування Q застосуємо рівняння (3.19) та умову Кутта-Жуковського (3.22) в передній кромці канавки. Оскільки в задній кромці вихроутворення є незначним і не буде суттєво впливати на пристінну течію, ним можна знехтувати. Таким чином, контролер зі зворотним зв'язком складається з трьох рівнянь і використовує дані, відомі зі стаціонарного розв'язку.

На рис. 3.30 представлено реакцію керуючої системи на малі періодичні збурення швидкості потоку. З графіка видно, як змінюється швидкість зовнішньої течії у межах періоду $[0, T]$, де $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

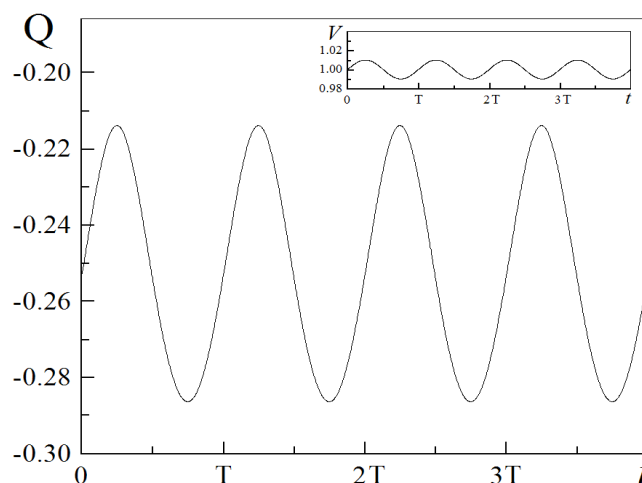


Рис. 3.30. Потужність відкачування рідини в періодично збуреному потоці

$$\text{при } \varepsilon = 0,01, \frac{\Omega}{\omega_0} = 1$$

Одержана функція $Q(t)$ знаходиться у протифазі до $V(t)$, її амплітуда приблизно у три рази вища за амплітуду коливань швидкості. Спійманий вихор на рис. 3.31 коливається в малому околі стаціонарної точки (на рис. вона помічена кружечком). З аналізу рис. 3.30, 3.31 випливає, коли в межах періоду швидкість потоку збільшується, інтенсивність відкачування падає, а

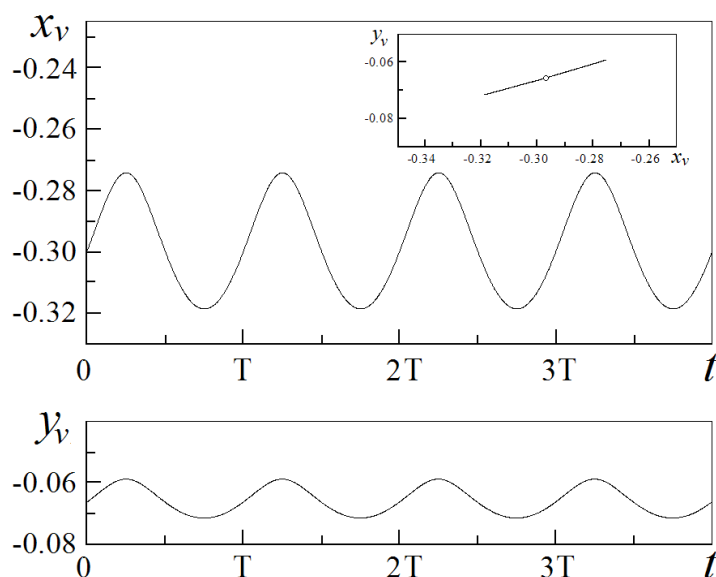


Рис. 3.31. Координати спійманого вихору в мілкій ($\beta = 60^\circ$) канавці в періодично збуреному потоці при $\varepsilon = 0,01$, $\frac{\Omega}{\omega_0} = 1$

вихор, який забезпечує безвідривне обтікання передньої кромки канавки, переміщується вгору. Надалі процес іде в зворотному напрямку. Цей висновок підтверджується також даними, які одержані при застосуванні розробленого контролера до потоку, в якому швидкість змінюється за лінійним законом від 1 до 0.5 і навпаки (рис. 3.32, 3.33). На рис. 3.32 видно, що коли швидкість падає на 50%, потужність відкачування, яка забезпечує стійкість спійманого вихору, збільшується за абсолютним значенням приблизно у 4 рази. Положення спійманого вихору переміщується при цьому ближче до передньої кромки канавки.

Представлені результати демонструють здатність розробленого контролера реагувати на збурення у зовнішньому потоці, чим забезпечується головна мета керування — створення стійкої циркуляційної зони і безвідривне обтікання кромки канавки.

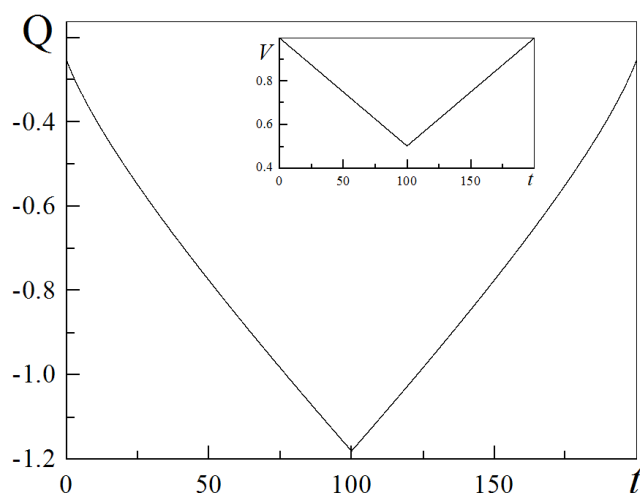


Рис. 3.32. Потужність відкачування рідини при зміні швидкості потоку за лінійним законом

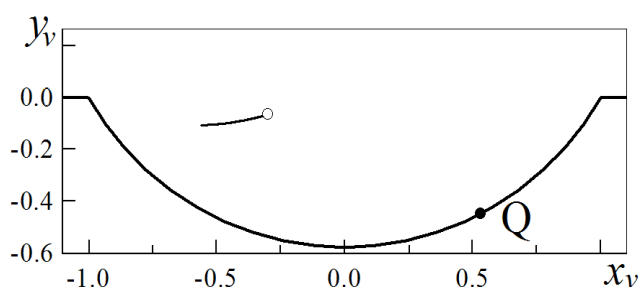


Рис. 3.33. Координати спійманого вихору при зміні швидкості потоку за лінійним законом

3.9. Висновки до розділу

В розділі запропоновано метод керування пристінковим потоком в циліндричних канавках, який відрізняється застосуванням модифікованої моделі спійманого вихору і забезпечує необхідні вимоги до формування структури течії. Досліджено випадки параметричного керування течією, коли відкачування рідини відсутнє, активного, (коли потужність відкачування задається) та реактивного керування течією (потужність відкачування рідини залежить від змін у потоці). Встановлено нові властивості спійманого вихору поблизу нерівностей поверхні та за наявності збурень потоку. Проведений динамічний аналіз виявив, що при стаціонарному обтіканні канавки з

відкачуванням рідини стаціонарні точки можуть бути фокусами (стійкими чи нестійкими) або сідлами. Одержано, що в мілких циліндричних канавках область, яка відповідає стійкій точці, є ширшою, ніж в глибоких, тому вони є більш перспективними для керування.

Розроблено нелінійний контролер пристінної течії, який відрізняється тим, що враховує рівняння рівноваги спійманого вихору відносно його координат, циркуляції, потужності відкачування рідини, кутової координати точки стоку та умову безвідривного обтікання кутів канавки і забезпечує активне керування зі зворотним зв'язком у нестационарному потоці. Розроблений контролер застосований для розрахунку параметрів активної керуючої схеми зі зворотним зв'язком у нестационарному потоці, коли система оперативно реагує на зовнішні збурення. Наведені приклади реалізації цієї схеми, коли швидкість зовнішньої течії змінюється періодично або за лінійним законом.

РОЗДІЛ 4. ЗАДАЧА ЗМЕНШЕННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ КВАДРАТНОГО ЦИЛІНДРА

Квадратний циліндр є однією з базових конфігурацій, що використовується в багатьох інженерних додатках та є частиною багатьох конструкцій. Експлуатація систем такого типу супроводжується вихроутворенням, що призводить до виникнення нестационарних сил, шумів і резонансу, структурних вібрацій та інших небажаних наслідків. Застосування методів керування динамікою вихорів поблизу тіла, що обтікається, дозволяє підвищити продуктивність обладнання і запобігти його руйнуванню. Розглянемо задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра з ребром d , що обтікається потоком рідини. В цьому контексті актуальним є дослідження задачі пасивного (параметричного) керування обтіканням квадратного циліндра, оскільки в цьому випадку не витрачається додаткова енергія на функціонування керуючого пристрою. Як впливає з аналізу робіт присвячених керуванню обтіканням циліндра, якщо керування застосоване до сліду тіла, воно є більш ефективним. В роботах [40, 156] для керування слідом квадратного циліндра пропонується застосування роздільних пластин, в роботах [73, 169] – встановлення елемента у вигляді пластини або стрижня на не фронтальній стороні циліндра, пристрою інжекції (відкачування) [39, 49, 77]. Це змінює вихрову динаміку сліду в результаті, рідинні сили, що діють на циліндр, зменшуються. Слід зазначити, що параметри керування в цих дослідженнях отримані шляхом зміни параметрів керуючих пристроїв, що вимагає багато часу. В цьому розділі для керування обтіканням квадратного циліндра пропонується встановлення двох пластин на фронтальній стороні квадратного циліндра, для знаходження параметрів керуючих пластин використовувати модифіковану модель спійманого вихору.

4.1 Постановка задачі зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра

Для отримання необхідної структури течії запропоновано встановлення двох симетричних пластин, приєднаних до передньої грані квадратного циліндра. Таким чином, жорсткий квадратний циліндр з стороною d з двома симетричними пластинами обтікається рівномірним потоком нестискуваної рідини з швидкістю V_∞ . На рис. 4.1 зображено двовимірну геометричну модель задачі та відповідну систему координат.

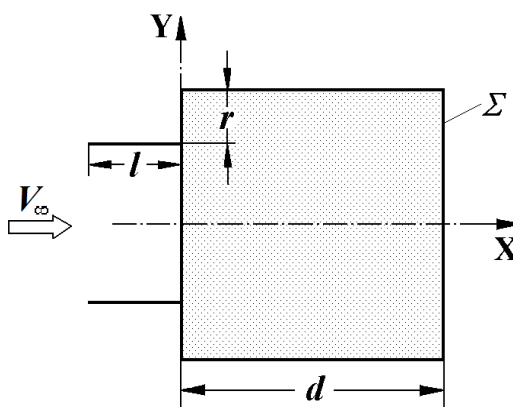


Рис. 4.1. Геометрія області течії

Схема керування включає два геометричні параметри: довжину пластини l та відстань r між точкою кріплення пластини та сусідньою стороною. Передбачається, що пластини тонкі та їх ширина є сталою. Потік характеризується числом Рейнольдса $Re = V_\infty d / \nu$, де ν – кінематична в'язкість рідини. Задача розглядається в безрозмірному вигляді. Всі геометричні параметри віднесені до сторони циліндра d , швидкість – до V_∞ , час – до d/V_∞ , частота – до V_∞/d . Число Струхалія визначається як $St = f_s d / V_\infty$, де f_s – частота зриву вихорів. Коефіцієнти сил і тиску визначаються за допомогою динамічного тиску $\rho V_\infty^2 / 2$, де ρ – густина рідини.

Течія в розглядуваній області описується рівнянням руху (4.1) та неперервності (4.2):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{V}, \quad (4.1)$$

де $\mathbf{V}(v_x, v_y)$ – вектор швидкості, p – тиск, t – час;

$$\nabla \mathbf{V} = 0, \quad (4.2)$$

Умова прилипання має вигляд:

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{n} |_{\Sigma} = 0, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{V} \cdot \boldsymbol{\tau} |_{\Sigma} = 0, \quad (4.4)$$

де Σ – поверхня тіла, \mathbf{n} , $\boldsymbol{\tau}$ – одиничні вектори нормалі та дотичної до тіла відповідно.

Вибір геометричних параметрів керуючих пластин визначається структурою потоку, що генерується поблизу циліндра з пластинами. Товщина пластин є фіксованою і дорівнює $0.02d$. Розвиток течії поблизу циліндра залежить від співвідношення параметрів l та r . Можливі варіанти структури течії поблизу квадратного циліндра з пластинами зображено на рис. 4.2, 4.3, 4.4. На рис. 4.2 шари рідини, що відділяються від керуючих пластин приєднуються до передніх кутів квадратного циліндра. Це призводить до пригнічення відриву потоку в гострих кромках та до звуження сліду за циліндром.

Як відомо з класичних експериментів Рошко [149] з циркуляційним циліндром, звуження сліду викликає зменшення опору тіла. Таким чином, конфігурація течії з рис. 4.2 дає можливість зменшити рідинні сили. Рис. 4.3

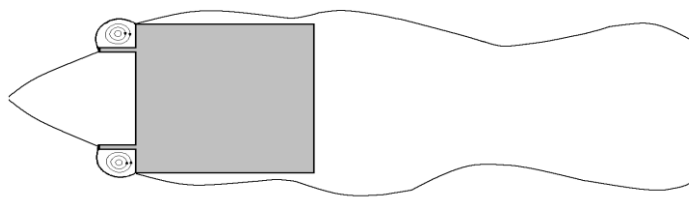


Рис. 4.2. Обтікання квадратного циліндра при найкращому розміщенні пластин

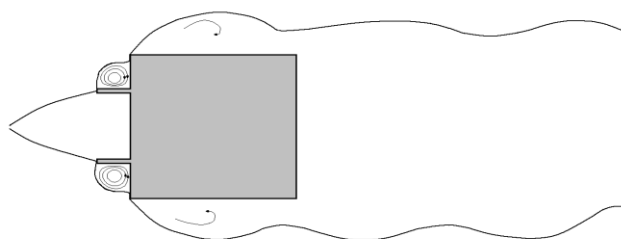


Рис. 4.3 Обтікання при розміщенні пластин занадто далеко від краю сторони квадратного циліндра

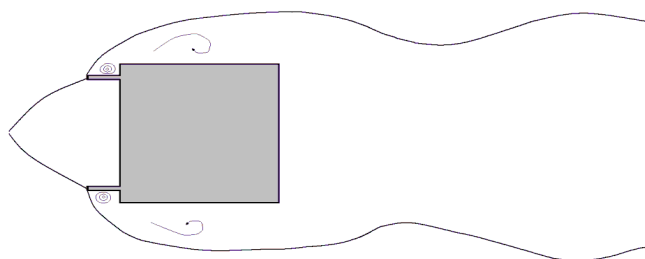


Рис. 4.4. Обтікання при розміщенні пластин занадто близько до краю сторони квадратного циліндра

відповідає випадку, коли пластини розташовані занадто далеко від краю циліндра. В цьому випадку шари рідини, що сходять з пластин, приєднуються до фронтальної сторони циліндра, що слабо впливає на відрив потоку в передніх кромках. Конфігурація 4.4 найбільш непридатна для керування потоком, оскільки в даному випадку відбувається глобальний відрив потоку на кінцях пластин. В результаті отримуємо ще ширший слід, ніж в некерованому випадку.

4.2. Побудова і застосування модифікованої моделі спійманого вихору до розв'язання задачі керування обтіканням квадратного циліндра

Як випливає з наведеного в попередньому підрозділі аналізу, схема керування повинна передбачати правильний вибір геометричних параметрів гідродинамічної системи. Для визначення параметрів керування (розмірів керуючих пластин) та вивчення характеристик потоку застосуємо модифіковану модель спійманого вихору. Оскільки циліндр з прикріпленими пластинами симетричний відносно осі x , достатньо розглядати лише його верхню частину (рис. 4.5).

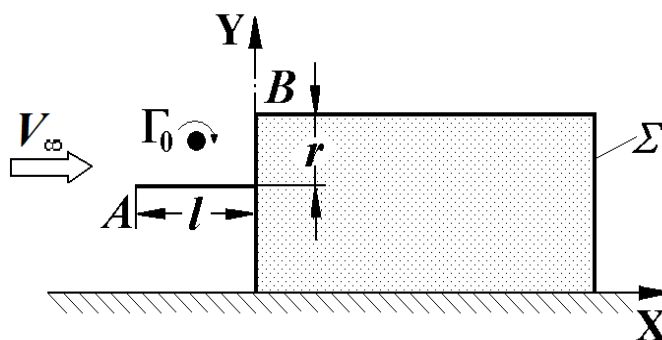


Рис. 4.5. Схема потоку зі спійманим вихором

Розглядається рівномірний потік ідеальної нестисливої рідини, що обтікає квадратний циліндр (розглядається лише верхня половина). Циркуляційна область між пластиною та фронтальною стороною циліндра моделюється точковим вихором, який розташований в центрі завихреності з циркуляцією Γ_0 та координатами (x_0, y_0) . Динамічна система, що розглядається, має один ступінь свободи, її еволюція описується нелінійним диференціальним рівнянням в R^2 :

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}), \quad (4.5)$$

де $\mathbf{X} \in R^2$ — вектор координат вихору $\mathbf{X}(t) = (x_0(t), y_0(t))$, вектор-функція $\mathbf{f} : R^2 \rightarrow R^2$ визначає швидкість вихору. Оскільки розглядається пасивне (параметричне) керування, в рівнянні (2.69)

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X})U, \quad (4.6)$$

$U = 0$. Практична мета керування полягає в тому, щоб сформувати і підтримувати стаціонарну циркуляційну течію, яка б запобігала генерації вихрових пелен в гострих кутах. Виходячи з цього, теоретичне моделювання процесу зводиться до визначення параметрів l та r , при яких забезпечується існування стійкого нерухомого вихору за умови, що в гострих кромках А і В задовольняється теорема Кутта-Жуковського про скінченність швидкості.

Для того, щоб вихор був у рівновазі, повинно виконуватися:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = 0. \quad (4.7)$$

В заданій конфігурації потоку умова 4.7 означає, що координати спійманого вихору задовольняють рівняння:

$$\mathbf{f}(\mathbf{X}) = 0. \quad (4.8)$$

Умова про безвідривне обтікання має вигляд:

$$\mathbf{V}|_A = C_1, \mathbf{V}|_B = C_2. \quad (4.9)$$

Рівняння (4.8)–(4.9) повністю описують задачу керування, оскільки вони дозволяють знайти параметри спійманого вихору та параметри

пластини при яких забезпечується виконання умови про безвідривне обтікання в гострих кромках.

Знайдемо комплексний потенціал потоку в області, що розглядається. Для потоку з твердими границями комплексний потенціал будується таким чином, щоб виконувалась умова (4.3) про рівність нулю нормальної складової швидкості на границі. Для того, щоб виконувались умови на поверхні Σ , остання моделюється вихровим шаром інтенсивності γ , що індукується стрибком тангенціальної швидкості поперек листа. У розрахунковій схемі лист розділяється на частини рівної довжини і кожна частина замінюється одним вихором циркуляції $\Gamma_k = \gamma(s)\Delta s$, де $\gamma(s)$ – лінійна інтенсивність шару в точці s , Δs – довжина сегменту між сусідніми вихорами, $k = 1, 2, \dots, N$, де N – кількість вихорів в дискретній схемі. На твердій стінці, що збігається з віссю, гранична умова виконується із застосуванням методу дзеркальних відображень. Тоді комплексний потенціал має вигляд

$$W(z) = V_\infty z + \frac{\Gamma_0}{2\pi i} \ln \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \ln \frac{z - z_k}{z - \bar{z}_k}. \quad (4.10)$$

В рівнянні (4.10) $z_k = x_k + iy_k$ – комплексні координати приєднаних вихорів. Враховуючи те, що комплексна швидкість

$$\mathbf{V}(z) = (v_x - iv_y)(z) = \frac{dW(z)}{dz},$$

отримуємо вираз :

$$(v_x - iv_y)(z_0) = V_\infty + \frac{\Gamma_0}{4\pi y_0} + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^N \Gamma_k \left(\frac{1}{z_0 - z_k} - \frac{1}{z_0 - \bar{z}_k} \right). \quad (4.11)$$

Виділяючи дійсну та уявну частини в рівнянні (4.11), отримуємо рівняння рівноваги вихору:

$$v_x(z_0) = 0, \quad (4.12)$$

$$v_y(z_0) = 0. \quad (4.13)$$

Умова (4.9) рівносильна виконанню наступних рівнянь:

$$\gamma(\mathbf{A}) = 0, \quad (4.14)$$

$$\gamma(\mathbf{B}) = 0. \quad (4.15)$$

Таким чином, задача керування (4.8)–(4.9) в дискретній схемі представлена системою чотирьох рівнянь (4.12)–(4.15), де змінними є параметри спійманого вихору (x_0, y_0, Γ_0) та геометричні характеристики пластини. Для замкнутості системи довжина пластини l є фіксованою, а інші параметри є функціями від l .

Для визначення циркуляції приєднаних вихорів Γ_k застосовується метод граничних інтегральних рівнянь [21]. Якщо припустити, що контрольні точки, в яких виконується граничні умови розташовані в середині відрізків, що пов'язують два сусідні вихори, отримуємо наступну систему лінійних рівнянь відносно Γ_k :

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \Gamma_k (V_n)_{lk} = -V_\infty - \frac{1}{2\pi} \Gamma_0 (V_n)_{l0}, \quad l = 1, 2, \dots, N,$$

де $(V_n)_{lk}$, $(V_n)_{l0}$ – нормальні швидкості, індуковані в l -тій контрольній точці приєднаним та вільним вихором відповідно. Слід зауважити, що оскільки поле течії симетричне відносно осі x , умова сталості циркуляції уздовж замкнутого контуру виконується автоматично.

Результати обчислень показують, що задача (4.12)–(4.15) має єдиний розв’язок, коли $0.15 \leq l \leq 0.65$, тобто, вихор інтенсивності Γ_0 , що знаходиться в точці (x_0, y_0) є нерухомим і забезпечується безвідривне обтікання в гострих кромках **A** і **B**. Отримані параметри керуючих пластин відповідають значенням $l = l_0 = 0.2$ та $r = r_0 = 0.16$. Аналіз власних значень матриці лінеаризованої системи в стаціонарній точці (x_0, y_0) показує, що точка є стійким фокусом. Ця стійкість робить дану конфігурацію досить цікавою з практичної точки зору. На рис. 4.6 зображено картину ліній течії з

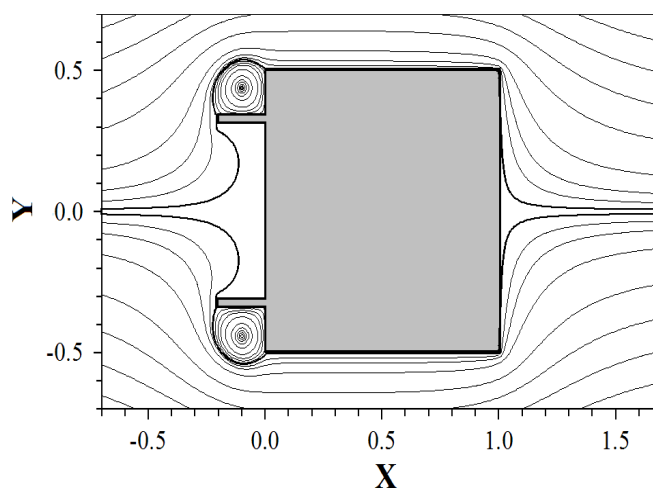


Рис. 4.6. Лінії течії з двома спійманими вихорами в фронтальній частині циліндра з керуючими пластинами при $l = 0.2$, $r = 0.16$

двома спійманими вихорами в фронтальній частині циліндра. Як видно з рис. 4.6, вибір геометричних параметрів керуючих пластин, що відповідають знайденим значенням, забезпечує безвідривний потік в передній кромці циліндра.

На рис. 4.7 показана залежність значень Γ_0, x_0, y_0 спійманого вихору та відстані r від довжини пластини l . Отримані залежності є лінійними. Графіки 4.7 і 4.8 демонструють геометричні характеристики даної схеми керування при яких забезпечується існування стійкого спійманого вихору.

Результати, отримані із застосуванням спрощеної моделі, свідчать про

існування стійкої рециркуляційної зони (спійманого вихору) перед квадратним циліндром, що генерується за допомогою невеликих прикріплених пластин. Далі отримані параметри керуючих пластин використаємо в чисельному моделюванні в'язкого обтікання квадратного циліндра.

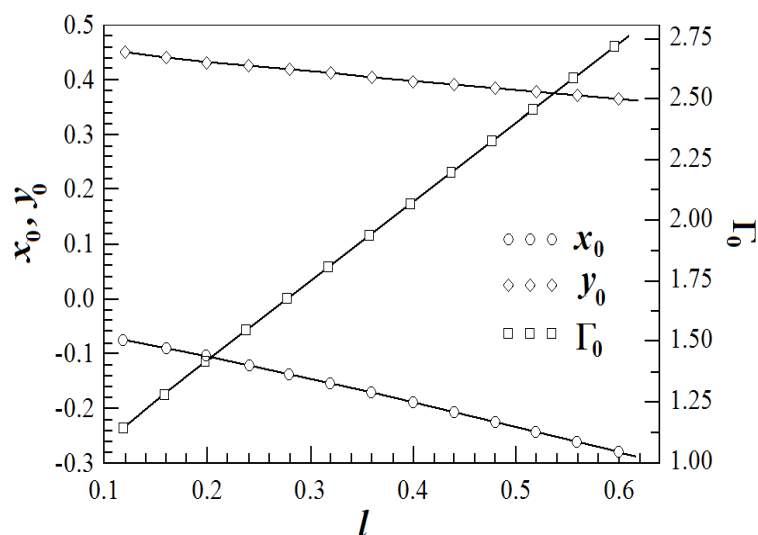


Рис. 4.7. Залежність параметрів спійманого вихору Γ_0, x_0, y_0 від довжини пластини

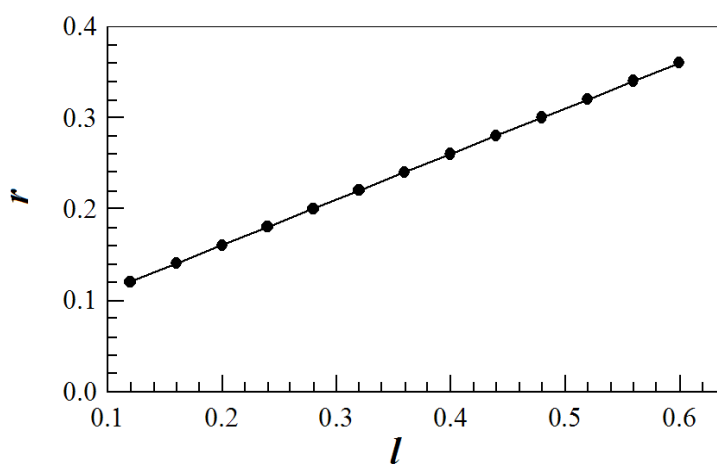


Рис. 4.8. Залежність відстані r від довжини пластини l

4.3. Чисельне моделювання в'язкого обтікання квадратного циліндра

Для обґрунтування та аналізу отриманих за допомогою спрощеної моделі параметрів керування, виконаємо чисельне моделювання в'язкої течії задачі, що розв'язується. Це дозволить проаналізувати вплив керування зі знайденими параметрами на структуру потоку та гідродинамічні характеристики квадратного циліндра та оцінити адекватність спрощеної моделі. Для цього в роботі пропонується застосувати вихровий метод з високою роздільною здатністю, що базується використанні системи рівнянь Нав'є-Стокса в змінних завихреність-швидкість [15]. Перевагою цього методу є можливість суттєвого зменшення розрахункової області відкиданням клітин розрахункової сітки, в яких завихреність рівна нулю, висока точність виконання граничних умов та висока точність обчислення завихреності в околі гострих кромek. Використання цього методу дозволяє досить точно моделювати класи потоків, описані в роботах [15], [168].

Рівняння переносу завихреності має вигляд:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = \frac{1}{Re} \Delta \omega, \quad (4.16)$$

де $\omega = \mathbf{k} \cdot \nabla \times \mathbf{V}$ – завихреність, яка розглядається як скалярна величина для 2D потоків. Поле швидкості $\mathbf{V}(\mathbf{r})$, індуковане об'ємною та поверхневою завихреністю, ω та γ відповідно, задається рівнянням Біо-Савара:

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Sigma} \gamma(\mathbf{r}', t) \tilde{\mathbf{k}} \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dl(\mathbf{r}') + \int_S \omega(\mathbf{r}', t) \mathbf{r} \times \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') ds(\mathbf{r}'), \quad (4.17)$$

де \mathbf{r} – радіус-вектор точки, G – фундаментальний розв'язок рівняння

Лапласа для необмеженої області: $G(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{r}|$.

Рівняння (4.16) розв'язується за допомогою процедури розщеплення на дві складові, тобто отримуємо рівняння, які описують вихрову конвекцію і дифузію:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \omega = 0, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta \omega. \quad (4.19)$$

При чисельній реалізації вихрового методу поле течії розглядається як множина дискретних об'ємів. Величина такого об'єму пов'язана з вузловими точками ортогональної сітки, що накладається на розрахункову область (рис.4.9).

Точкові вихори, розміщені всередині кожного об'єму, характеризуються завихреністю ω_{ij} , де $i = 1, 2, \dots, N_x$, $j = 1, 2, \dots, N_y$, N_x , N_y – кількість елементів сітки в напрямку x та y відповідно. Закон збереження

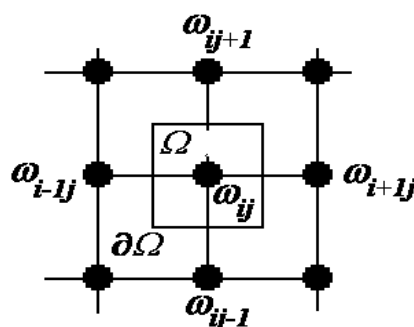


Рис. 4.9. Схема дискретизації вихрового поля

завихреності в елементарному об'ємі можна записати в такому вигляді:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} \omega_{ij} dq = - \int_{\partial\Omega} \omega_{ij} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dl, \quad (4.20)$$

де Ω та $\partial\Omega$ – дискретний об'єм та його границя відповідно, \mathbf{n} – нормаль до $\partial\Omega$, \mathbf{V} – швидкість потоку на $\partial\Omega$. З рівняння (4.20), що визначає циркуляцію швидкості по елементарному об'єму, отримаємо чисельну схему для рівняння (4.18):

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{ij}^{t+\Delta t} - \omega_{ij}^t}{\Delta t} \Delta x \Delta y \approx & (\omega_{i-1j}^t v_{xi-1j}^t - \omega_{i+1j}^t v_{xi+1j}^t) \Delta y + \\ & (\omega_{ij-1}^t v_{yij-1}^t - \omega_{ij+1}^t v_{yij+1}^t) \Delta x - \omega_{ij}^t (|v_{xij}^t| \Delta y + |v_{yij}^t| \Delta x), \end{aligned} \quad (4.21)$$

де Δx , Δy – кроки часової дискретизації в напрямках x та y , Δt – крок по часу.

Очевидно, що схема (4.21) є схемою першого порядку по часу та другого порядку в просторі. Розробка цього підходу на багат шарових шаблонах представлена в [70]. Зауважимо, що ця схема є недисипативною і має поліпшені дисперсійні властивості в порівнянні з класичними лінійними схемами.

Для моделювання в'язкого процесу дифузії, рівняння (4.19) інтегруються методом скінчених різниць. Схема другого порядку в просторі для вузлів ортогональної сітки має вигляд:

$$\frac{\omega_{ij}^{t+\Delta t} - \omega_{ij}^t}{\Delta t} = \frac{1}{Re} \left(\frac{\omega_{i+1j}^t - 2\omega_{ij}^t + \omega_{i-1j}^t}{(\Delta x)^2} + \frac{\omega_{ij+1}^t - 2\omega_{ij}^t + \omega_{ij-1}^t}{(\Delta y)^2} \right). \quad (4.22)$$

Дискретні рівняння (4.21), (4.22) інтегрувались із застосуванням явної схеми першого порядку. Слід відзначити, що вона є стійкою при числах Куранта, що не більші 1.

Таким чином, розглядається зміна в часі циркуляції $\Gamma_{ij}(t) = \omega_{ij}(t) \Delta x \Delta y$ вихрової частинки, зафіксованої в вузлі сітки на відміну від класичного вихрового методу [67, 117], згідно якого відбувається перетворення вільних

дискретних вихорів в поле течії. Адаптивність схеми досягається за рахунок точок сітки, циркуляція яких задовольняє умові $|\Gamma_{ij}| < \varepsilon$, де ε мала величина.

Механізм Лайтхіла створення завихреності на твердій стінці і зв'язок з вихровими методами докладно описані, зокрема, в роботі [67]. Генерування завихреності пояснюється зміною циркуляції γ вихрової пелени, що моделює поверхню тіла через зміну поля завихреності. У чисельних схемах вихрового типу існують різні підходи до розрахунку γ і її включення в граничні умови для завихреності. В роботі визначається інтенсивність шару з відсутності наскрізної граничної умови потоку (4.3).

В результаті отримуємо рівняння (4.23):

$$\int_{\Sigma} \gamma(\mathbf{r}', t) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} dl(\mathbf{r}') + \int_S \omega(\mathbf{r}', t) \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial n} ds(\mathbf{r}') = 0, \quad (4.23)$$

де $\mathbf{r} \in \Sigma$.

Згідно теореми Кельвіна про збереження циркуляції в обчислювальній області, маємо:

$$\int_{\Sigma} \gamma(\mathbf{r}', t) dl(\mathbf{r}') + \int_S \omega(\mathbf{r}', t) ds(\mathbf{r}') = 0.$$

Умова (4.4) використовується для отримання граничної умови для завихреності. Враховуючи стрибок швидкості вздовж вихрової пелени, отримаємо співвідношення:

$$(\mathbf{V}_{\tau})_- = \mathbf{V}_{\tau}^0 + \frac{\gamma}{2},$$

де \mathbf{V}_{τ}^0 – тангенціальна швидкість точок поверхні тіла, що обчислюється з (4.17), $(\mathbf{V}_{\tau})_-$ – граничне значення тангенціальної швидкості тіла, для якого

виконується (4.4). Згідно Wu [164], для визначення завихреності на тілі, отримуємо граничну умову типу Діріхле для завихреності у вигляді:

$$\omega_0 = \frac{2\mathbf{V}_\tau^0}{\Delta s},$$

де Δs – крок сітки перпендикулярний відносно стінки.

Завихреність, утворена на гладких стінках проникає в рідину через механізм в'язкої дифузії, що описується формулою (4.22). Завихреність в гострих кромках переноситься до потоку згідно рівняння конвекції (4.21), що еквівалентно реалізації умови Кутта-Жуковського в цій точці.

Опишемо обчислення поля тиску та сил, що діють на тіло. Для цього запишемо рівняння Нав'є-Стокса в змінних завихреності і швидкості. Це дозволяє відокремити суто кінематичну задачу від задачі знаходження тиску, що значно спрощує чисельне моделювання гідродинамічних полів. Задача знаходження тиску із завихреності і полів швидкостей є складним завданням, що привертає увагу багатьох дослідників [72, 132, 157]. При безпосередньому розв'язуванні рівняння Пуассона для тиску, виникає проблема правильного вибору граничної умови. З іншого боку, використання альтернативних підходів ([132], [157]) є нелегким через наявність гострих кромek в розглянутій геометричній конфігурації.

Шляхом прямого інтегрування рівнянь Нав'є-Стокса отримуємо поле тиску у представленні Ламба [112]:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_x^2 + v_y^2) - v_y \omega = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial y}, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v_x^2 + v_y^2) + v_x \omega = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x}. \quad (4.25)$$

Рівняння (4.24), (4.25) пов'язують поле тиску з швидкістю та полем

завихреності. Інтегруючи рівняння (4.24) по змінній x та рівняння (4.25) по змінній y , отримаємо формулу для обчислення безрозмірного тиску:

$$\bar{p} = 1 - v_x^2 - v_y^2 + 2 \int_{-\infty}^x \left(v_y \omega - \frac{\partial v_x}{\partial t} - \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) dx, \quad (4.26)$$

$$\bar{p} = 1 - v_x^2 - v_y^2 + 2 \int_{-\infty}^y \left(-v_x \omega - \frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial \omega}{\partial x} \right) dy, \quad (4.27)$$

де $\bar{p} = 2(p - p_\infty)/\rho V_\infty^2$.

Для обчислення тиску обирається одне з рівнянь (4.26), (4.27). Це дозволяє отримати вираз для повного опору, включаючи його форми та в'язкі компоненти.

Коефіцієнти рідинних сил на тілі обчислюються наступним чином:

$$C_x = \int_L \bar{p} n_x dx, \quad C_y = \int_L \bar{p} n_y dy,$$

де C_x , C_y – коефіцієнти опору та підйимальної сили відповідно, $\mathbf{n}(n_x, n_y)$ – зовнішня нормаль до тіла.

В даній чисельній схемі рівняння (4.26), (4.27) інтегруються методом трапецій на базі ортогональної сітки.

За допомогою вихрового методу, описаного вище, результати моделювання обтікання квадратного циліндра перевірялись для середніх чисел Рейнольдса ($Re = 100 \div 600$). Отримані результати порівнювались з теоретичними, експериментальними та даними чисельних експериментів, наявних в роботах з даної тематики. При дослідженні використовується прямокутна трирівнева сітка зі сталим розміром клітин (рис. 4.10).

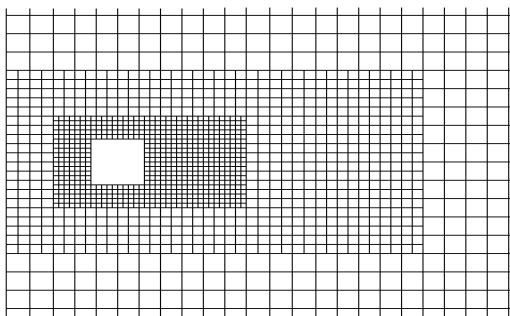
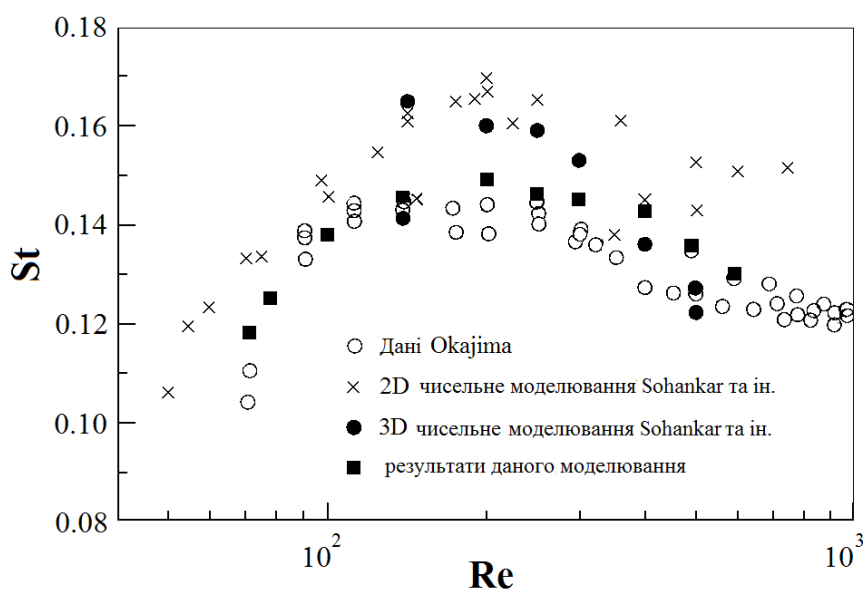


Рис. 4.10. Розрахункова сітка

Крок сітки Δ_1 в області, прилеглій до тіла, збігається з довжиною панелей, що імітують приєднаний вихровий шар. Розмір клітин кожної наступної сітки подвоюється в порівнянні з попереднім. Кількість вузлів по всій стороні визначається після попередніх тестів $n_s = 50$, і становить $\Delta_1 = 0,02$. Безрозмірна ширина розрахункової області становить 20, довжина вгору за течією і область сліду – 10 і 90 відповідно. Для всіх досліджених випадків в даній роботі нормований обчислювальний часовий крок дорівнює $\Delta T = 0,01$.

На рис. 4.11, 4.12 представлено зміну числа Струхаля St та коефіцієнта

Рис. 4.11. Залежність числа Струхаля St від числа Рейнольдса

опору C_D залежно від числа Рейнольдса. Частоти вихроутворення визначалися зі спектрів потужності нестационарних сигналів підйимальної сили, а також пульсацій швидкості в сліді. Отримані результати є близькими до відомих експериментальних даних Okajima [134, 135], а також результатами 2D та 3D DNS-моделювання Norberg та ін. [154]. Незважаючи на те, що 3D ефекти розвиваються в потоці поблизу квадратного циліндра починаючи з $Re \approx 170$ [154], дані результати узгоджуються з експериментальними даними та з чисельними результатами. Зауважимо, що при $Re \geq 150$, отриманий середній коефіцієнт аеродинамічного опору збігається як з експериментальними, так і з чисельними результатами. У той же час, число Струхала передбачене 3D моделюванням не обов'язково більш «точне», ніж отримані в роботі результати. Вцілому, проведене порівняння вказує на хорошу кореляцію розрахованих середньочасового опору та частоти вихроутворення з відомими експериментальними і розрахунковими даними.

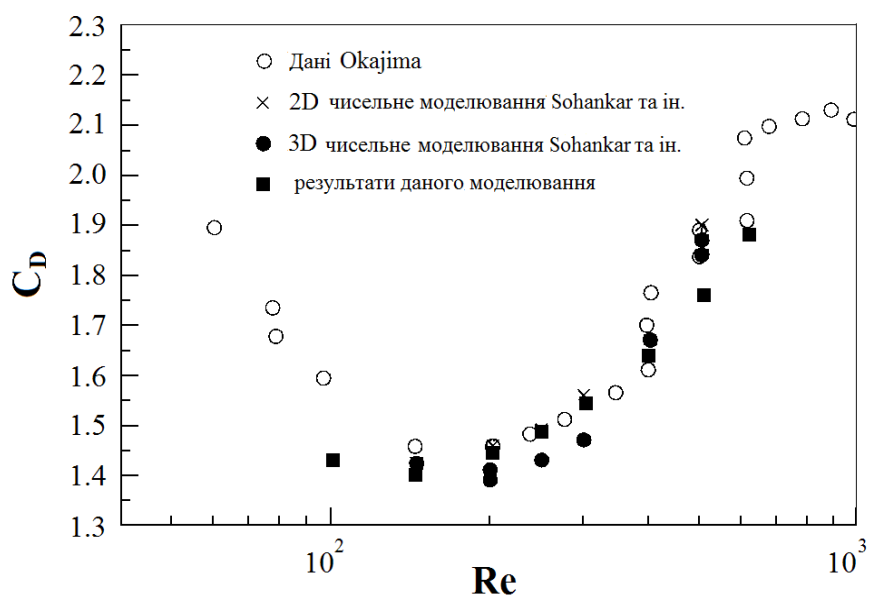


Рис. 4.12. Залежність середнього коефіцієнта опору C_D від числа Рейнольдса

Даних щодо кількісних характеристик підйимальної сили, що діє на квадратний циліндр, в літературі не знайдено. В таблиці 4.1 подано дані для

середньоквадратичного значення коефіцієнта підйимальної сили $C_{L_{rms}}$, отриманого в даній роботі, та відомі результати попередніх досліджень при $Re = 150$ і $Re = 500$. Показано, що коефіцієнт $C_{L_{rms}}$ надзвичайно чутливий як до зміни числа Рейнольдса Re так і до співвідношення сторін обчислювальної області [154], що пояснює значні розбіжності в результатах. Проте, отримане значення $C_{L_{rms}}$ досить добре узгоджується з іншими результатами чисельних розрахунків при $Re = 150$ та експериментальними даними при $Re = 500$. Проведені порівняння показують, що вихровий метод, застосований в роботі, здатний правильно передбачити обтікання квадратного циліндра при помірних числах Рейнольдса.

Таблиця 4.1

Порівняння отриманих середньоквадратичних значень підйимальної сили

$C_{L_{rms}}$ для квадратного циліндра при $Re = 150$ та $Re = 500$

Дослідження	$C_{L_{rms}}$	
	$Re = 150$	$Re = 500$
Ali та ін. [40]	0.28	—
Sohankar [154]	0.23	1.13 – 1.22
Doolan [71]	0.296	—
Shimizu та ін.[153]	—	0.56 – 0.72
Hwang, Sue [90]	—	0.9 – 1.01
Дане дослідження	0.23	0.78

4.4. Аналіз отриманих результатів

В цьому підрозділі вивчається вплив двох симетричних пластин, прикріплених до фронтальної сторони квадратного циліндра на структуру

потoku і гідродинамічні навантаження квадратного циліндра. Оскільки ми розглядаємо можливість незначного керуючого впливу на потік, пластини досить короткі і тонкі, їх нормована довжина і ширина пластини становить $l = 0.2$ і $d = 0.02$ відповідно. Відстань r пластини до сусіднього краю циліндра вибирається із залежності, представленій на рис. 4.8, яка була отримана в попередньому підрозділі з використанням спрощеної моделі, що гарантує утворення стабільної зони рециркуляції між пластиною і фронтальною стороною циліндра. При цьому значення r_0 відповідної обраної довжини пластини становить 0.16.

Порівняємо вихрову структуру потоку, що утворюється за квадратним циліндром у випадку без керування та з керуванням зі знайденими параметрами. На рис. 4.13, 4.14 представлено вихрову структуру потоку без керування при $Re = 150$ та $Re = 500$.

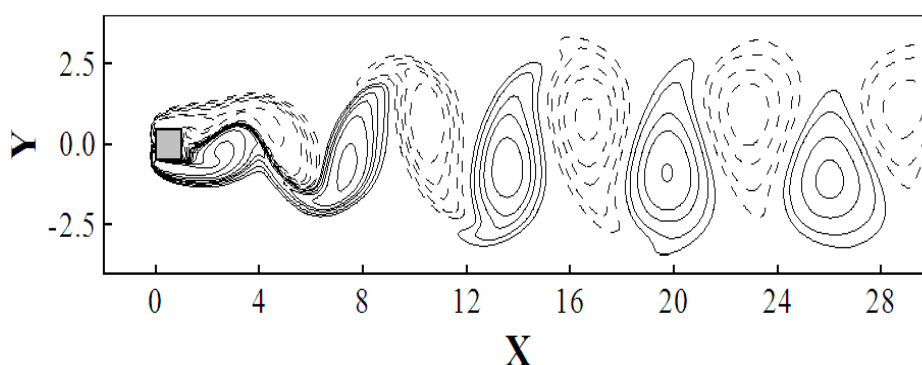


Рис. 4.13. Завихреність за квадратним циліндром без керування при $Re = 150$ (суцільна лінія – додатня циркуляція, пунктирна лінія – від’ємна циркуляція)

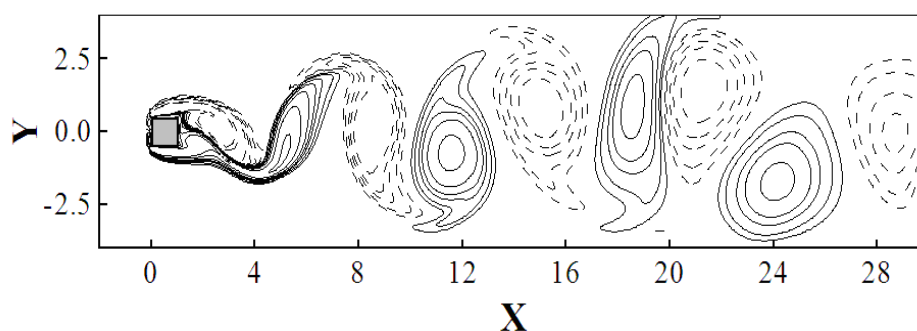


Рис. 4.14. Завихреність за квадратним циліндром без керування при $Re = 500$

На рис. суцільна та пунктирна лінії відповідають додатній та від'ємній циркуляції відповідно. При $Re = 150$, ще до початку $3D$ ефектів, слід є ламінарним, регулярним і характеризується первинною нестійкістю, вихорами Кармана. Обчислене число Струхаля, що характеризує частоту зриву вихорів, має значення 0.145 , що є близьким до експериментальних даних Окаїма [134] ($St = 0.148$) і дещо менше обчислених значень Іноуе та ін. [74] ($St = 0.151$). Обчислення при $Re = 500$ є наближеними, оскільки перехід до $3D$ потоку поза циліндром відбувається до значення $Re \approx 190$ [154]. Картини течії та навантаження, отримані в даній роботі є близькими до спостережуваних. Так, одержане число Струхаля $St = 0.135$ співпадає з експериментальними даними Norberg [133]. Інші характеристики теж добре узгоджуються з наявними в літературі експериментальними та чисельними даними, що показано на графіках 4.11, 4.12 і в таблиці 4.1.

На рис. 4.15, 4.16 зображено слід за циліндром при керуванні зі знайденими параметрами (з пластинами при $l = 0.2$, $r = 0.16$).

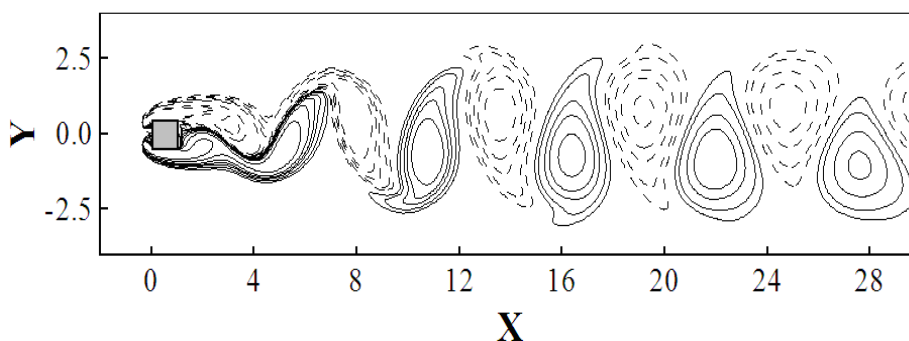


Рис. 4.15. Завихреність за квадратним циліндром при керуванні зі знайденими параметрами $l = 0.2$, $r = 0.16$, $Re = 150$

Зауважимо, що контури завихреності на рис. 4.13, 4.14 та 4.15, 4.16 відповідають не тільки однаковим числам Рейнольдса, а й однаковим моментам розвитку потоку за циліндром. З рис. 4.15, 4.16 видно, що структура відривного потоку в керованому випадку відрізняється від

некерованого. Слід стає більш регулярним, його ширина стає вужчою,

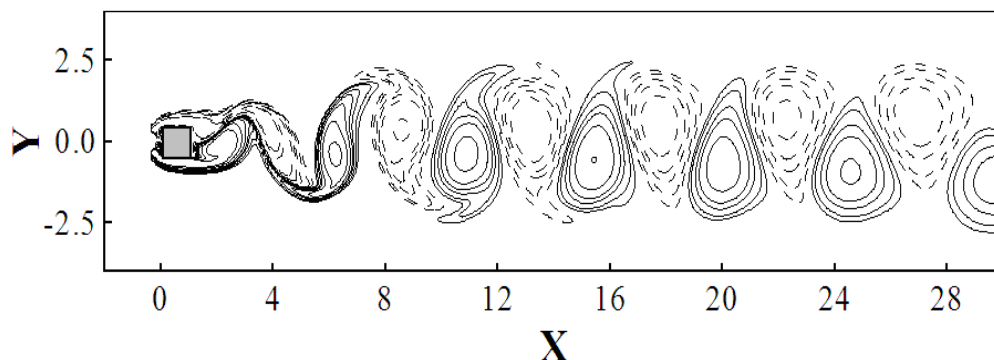


Рис. 4.16. Завихреність за циліндром при керуванні зі знайденими параметрами $l = 0.2$, $r = 0.16$, $Re = 500$

особливо при $Re = 500$. Період утворення вихорів в керованому потоці зменшується в порівнянні з некерованим потоком, що призводить до зменшення інтенсивності вихорів в сліді та їх масштабу. Вплив керуючих пластин на потік значно зростає при збільшенні числа Рейнольдса. Отримана безрозмірна частота зриву вихорів (число Струхалія) має значення $St = 0.157$ при $Re = 150$ та $St = 0.195$ при $Re = 500$. Тобто, число Струхалія St в некерованому потоці збільшується при зростанні числа Рейнольдса на 8% та на 40% в керованому.

З рис. 4.15, 4.16 видно, що фронтальна частина циліндра лежить всередині рециркуляційних зон, які генеруються кінцями пластин. Це явище, а також зменшення довжини рециркуляційних бульбашок та зміна сліду викликають різкий перерозподіл тиску по всьому тілу.

На графіках 4.17, 4.18 порівнюється усереднений за часом коефіцієнт $C_p = 2(p - p_\infty)/\rho V_\infty^2$ для керованого та некерованого випадків при $Re = 150$ і $Re = 500$ відповідно. Отримані результати демонструють вирівнювання тиску на фронтальній стороні циліндра та зростання базового коефіцієнта тиску C_{pb} в керованому випадку. При $Re = 150$ базовий коефіцієнт тиску

зростає від $C_{pb} = -0.73$ в природньому потоці до $C_{pb} = -0.6$ в керованому, при $Re = 500$ зростає від $C_{pb} = -1.2$ до $C_{pb} = -0.8$. Очевидним є зменшення гідродинамічного опору квадратного циліндра, особливо при $Re = 500$. Слід

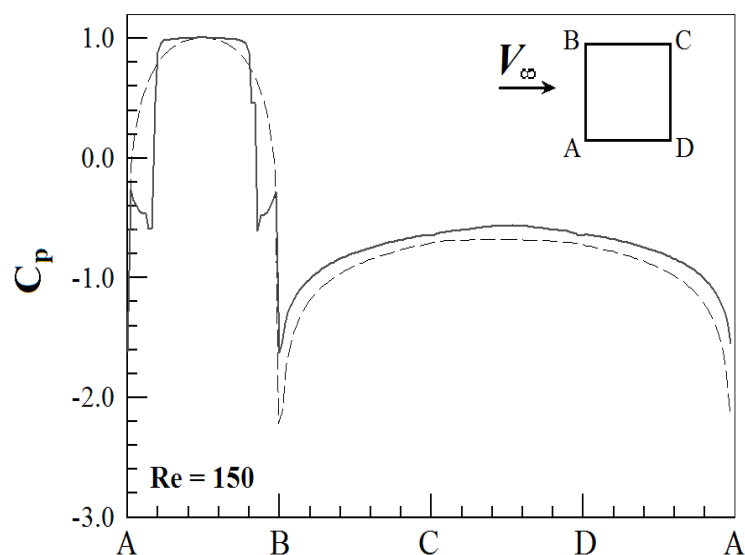


Рис. 4.17. Коефіцієнт тиску на поверхню циліндра без керування (пунктирна лінія) і з керуванням зі знайденими параметрами $l = 0.2$, $r = 0.16$ (суцільна лінія) при $Re = 150$

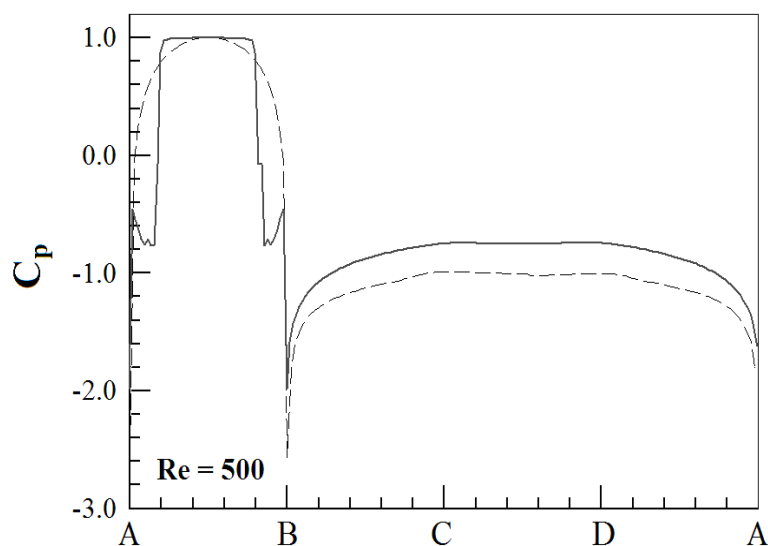


Рис. 4.18. Коефіцієнт тиску на поверхню циліндра без керування (пунктирна лінія) і з керуванням зі знайденими параметрами $l = 0.2$, $r = 0.16$ (суцільна лінія) при $Re = 500$

зауважити, що отримані значення C_{pb} в природньому потоці є близькими до даних, отриманих Sohankar та ін. [154], що є важливим для верифікації використаної чисельної схеми.

Таким чином, фронтальні пластини суттєво впливають як на структуру, так і на розподіл тиску, що викликає зміну рідинних сил в порівнянні з некерованим потоком.

Щоб підкреслити важливість результатів, отриманих за допомогою модифікованої моделі спійманого вихору, було проведене моделювання в'язкого обтікання квадратного циліндра з параметрами пристрою керування, що відрізняються від знайдених. Рис. 4.19 демонструє зміну коефіцієнтів

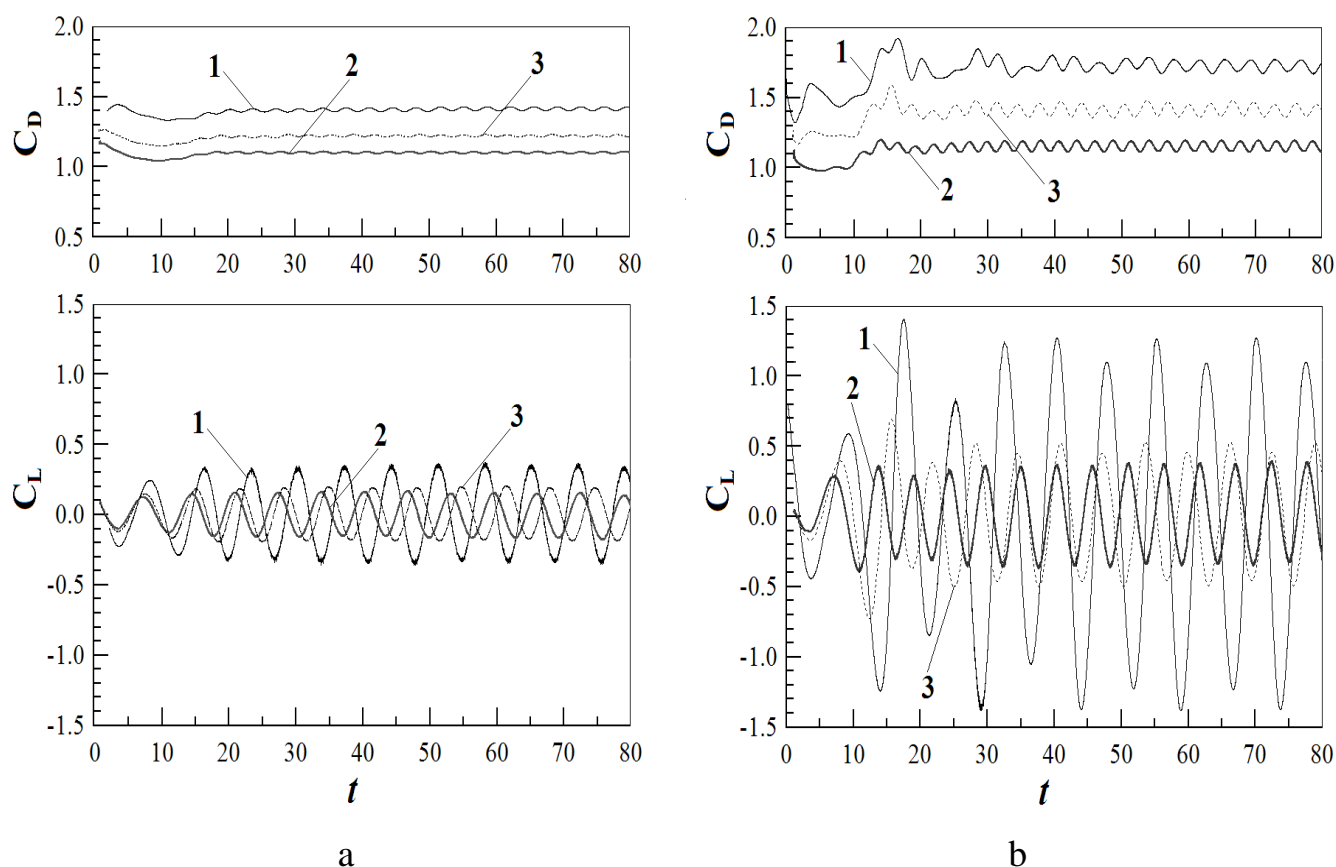


Рис. 4.19. Миттєвий коефіцієнт лобового опору C_D і коефіцієнт підйимальної сили C_L без керування (крива 1), з керуванням зі знайденими параметрами $l = 0.2, r = 0.16$ (крива 2), з керуванням при $l = 0.2, r = 0.22$ (крива 3) при
а – $Re = 150$, б – $Re = 500$

опору C_D та підіймальної сили C_L квадратного циліндра в керованому та некерованому випадках при $Re = 150$ і $Re = 500$ відповідно. Криві 3 на рис. 4.19 відповідають випадку, коли $r = 0.22$, що є більшим, ніж значення r_0 , тобто коли пластини розміщені далі від країв квадратного циліндра. Криві, позначені 1 відповідають природному потоку, криві 2 описують потік поблизу циліндра при керуванні зі знайденими параметрами ($l = 0.2$, $r = 0.16$).

Представлені дані демонструють суттєве зниження гідродинамічних навантажень квадратного циліндра з керуючими пластинами. Середнє значення коефіцієнта опору квадратного циліндра при $Re = 150$ отримане в роботі (крива 1 на рис. 4.19) дорівнює $\overline{C_D} = 1.4$, що співпадає як з експериментальними [135] так і з DNS [74, 154] даними. Модифікація циліндра шляхом встановлення керуючих пластин зі знайденими параметрами дозволяє знизити коефіцієнт опору до $\overline{C_D} = 1.08$ (крива 2 на рис. 4.20). Таким чином, зменшення сили опору становить близько 22% в порівнянні з некерованим потоком. При $Re = 500$, зниження середнього опору є більш істотним, коефіцієнт $\overline{C_D}$ зменшується від значення 1.76 без керування до 1.12, що відповідає керуванню зі знайденими за допомогою модифікованої моделі спійманого вихору параметрами ($l = 0.2$, $r = 0.16$). В цьому випадку керування дає ефект в 35%. Аналогічні результати отримані для флуктуаційних сил, що діють на квадратний циліндр. Амплітуди опору і коефіцієнта підіймальної сили значно зменшуються в керованому потоці. Наприклад, при $Re = 500$, амплітуда C_L в керованому потоці втричі менша, ніж в некерованому.

Графіки миттєвих ліній течії, що представлені на рис. 4.20, 4.21, 4.22 інтерпретують можливу топологію потоку навколо циліндра з керуючими пластинами. Результати моделювання отримані для числа Рейнольдса $Re = 500$. Три миттєві картини ліній течії відповідають ідентичним моментам вихроутворення потоку та відрізняються розташуванням керуючих

пластин відносно краю квадратного циліндра. В першому випадку, коли

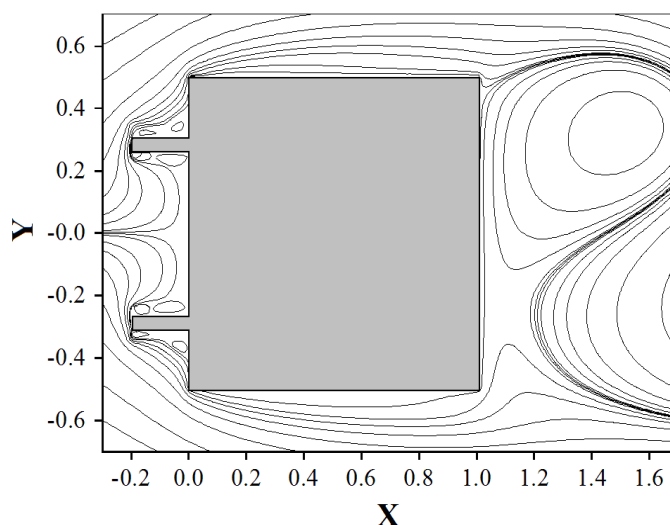


Рис. 4.20. Лінії течії навколо квадратного циліндра з керуючими пластинами довжиною $l = 0.2$, $Re = 500$ при $r = 0.22$

$r > r_0$, лінія течії сходиться з кінця пластини і стикається з фронтальною стороною циліндра (рис. 4.20). Невеликий вихор, обмежений нульовою лінією течії, не може попередити відрив потоку поблизу кута циліндра. У другому випадку (рис. 4.21) не відбувається приєднання лінії течії до поверхні циліндра. Лише в останньому випадку при $r = r_0$ нульова лінія течії

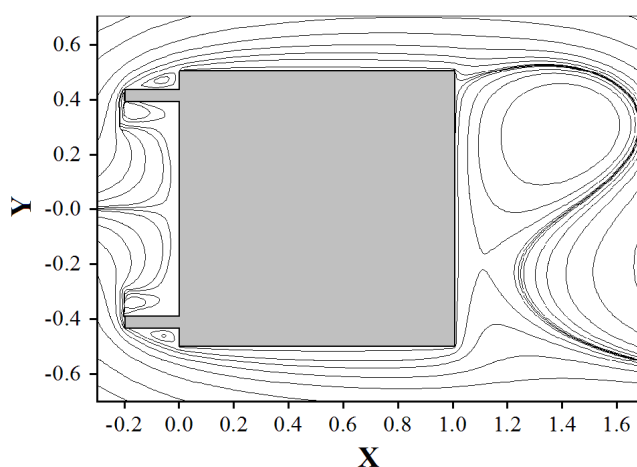


Рис. 4.21. Лінії течії навколо квадратного циліндра з керуючими пластинами довжиною $l = 0.2$, $Re = 500$ при $r = 0.08$

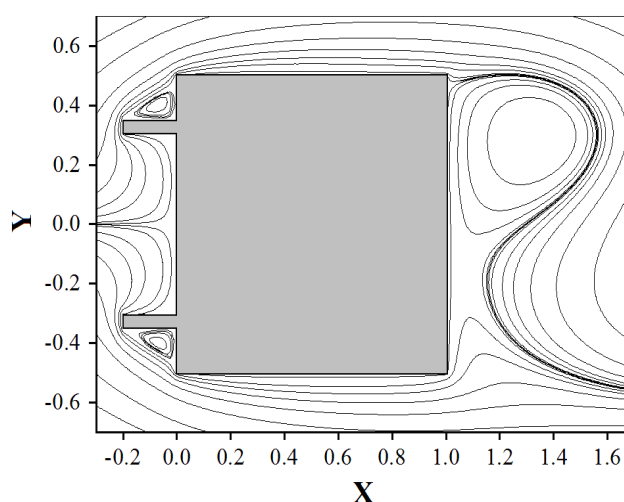


Рис. 4.22. Лінії течії навколо квадратного циліндра з керуючими пластинами довжиною $l = 0.2$, $Re = 500$ при $r = 0.16$

приєднується до поверхні циліндра в околі його кута (рис. 4.22). Внаслідок цього рециркуляційна область звужується, попереджується відрив потоку в кромках циліндра. Як наслідок, рециркуляційна бульбашка в задній частині циліндра менша, ніж в попередніх випадках. Отримані результати співпадають з результатами, отриманими із застосуванням модифікованої моделі спійманого вихору. Цей факт підкреслює важливість розвитку простих топологічних моделей з метою прогнозування властивостей пристроїв, що використовуються для керування потоком.

Рис. 4.23 демонструє зміну числа Струхаля St фронтальними пластинами при їх конфігурації з параметрами l_0 , r_0 для різних чисел Рейнольдса.

Для порівняння також представлені значення St в некерованому випадку. Моніторинг частоти зриву вихорів, як відомо, є одним зі способів кількісної оцінки процесів, що відбуваються в сліді тіла. Таким чином, зростання числа Струхаля в керованому потоці вказує на значну зміну структури сліду, що й показано на рис. 4.15, 4.16. З рис. 4.23, 4.24 видно, що ці зміни є типовими для всіх чисел Рейнольдса з інтервалу, що розглядається.

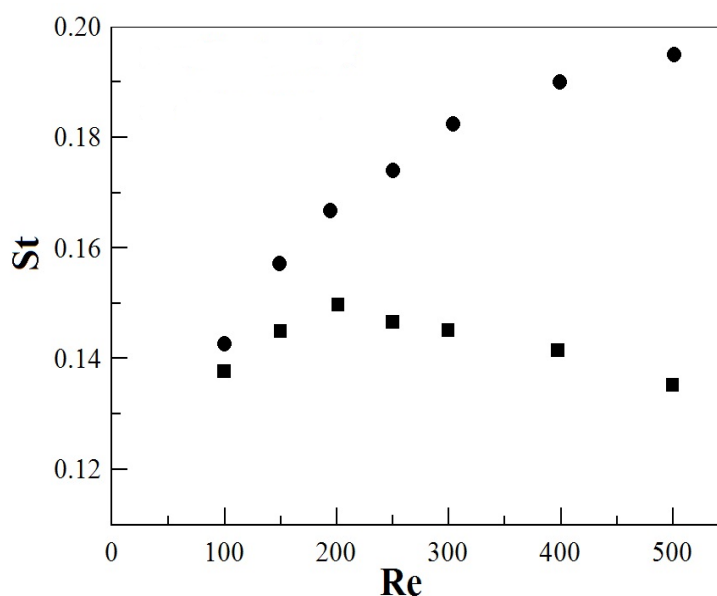


Рис. 4.23. Залежність числа Струхалія для квадратного циліндра без керування (квадрати) та з керуванням (круги) від числа Рейнольдса

Встановлення фронтальних пластин зі знайденими за допомогою модифікованої моделі спійманого вихору параметрами пливає на частоту утворення вихорів, яка зростає при збільшенні числа Рейнольдса.

На рис. 4.24 показано залежність середнього коефіцієнта опору $\overline{C_D}$ від

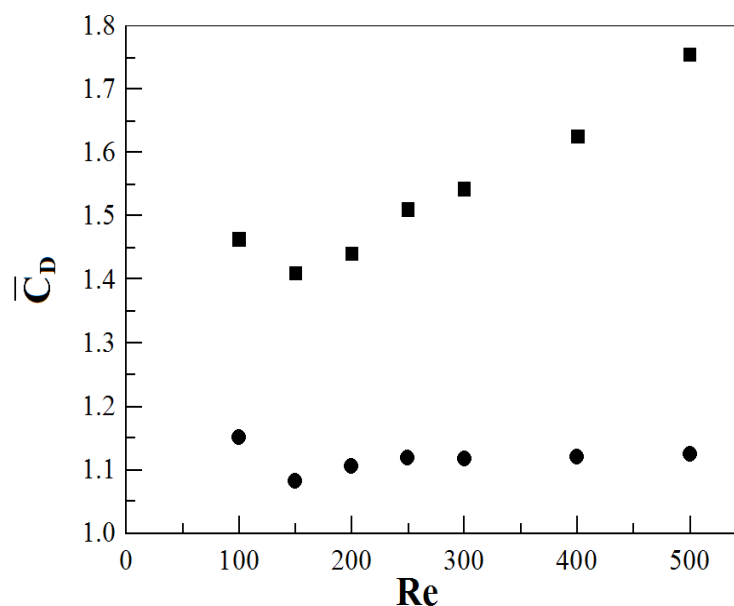


Рис. 4.24. Залежність середнього коефіцієнта опору квадратного циліндра без керування (квадрати) та з керуванням (круги) від числа Рейнольдса

числа Рейнольдса, отримане при отриманих в роботі параметрах керуючих пластин l_0 , r_0 . Для розглянутого в роботі діапазону чисел Рейнольдса коефіцієнт $\overline{C_D}$ значно зменшується в керованому потоці. Це вказує на відносне зменшення сили опору в керованому випадку при великих числах Рейнольдса.

Всі результати, отримані при чисельному моделюванні в'язкого обтікання квадратного циліндра демонструють ефективність керуючих пластин, яка зростає при збільшенні числа Рейнольдса. При малих числах Рейнольдса з розглянутого діапазону, вихор менш виражений, оскільки він пригнічується в'язкістю.

Одержані в роботі результати вказують, що для успішної розробки алгоритмів керування потоком поблизу поганообтічних тіл необхідно враховувати топологічні особливості течії.

4.5. Висновки до розділу

В цьому розділі розв'язано задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра. Розв'язання задачі базується на застосуванні модифікованої моделі спійманого вихору. Знайдено параметри керування обтіканням квадратного циліндра з керуючими пластинами, що дозволяють зменшити гідродинамічні навантаження.

Ефективність схеми керування та знайдених параметрів перевірено шляхом чисельного моделювання в'язкого обтікання квадратного циліндра з фронтальними пластинами в діапазоні середніх чисел Рейнольдса за допомогою вихрового методу, що базується на використанні системи рівнянь Нав'є-Стокса в змінних завихреність-швидкість. Отримані результати показали значну регуляризацію структури потоку в сліді при керуванні. Показано, що встановлення фронтальних пластин зі знайденими

параметрами пливає на частоту утворення вихорів, яка зростає при збільшенні числа Рейнольдса. Число Струхаля St в некерованому потоці збільшується при зростанні числа Рейнольдса на 8% та на 40% в керованому. Завдяки регуляризації сліду при керуванні зменшується середній опір і флуктуаційні сили, що діють на циліндр. Керування потоком дозволяє знизити коефіцієнт гідродинамічного опору квадратного циліндра від 20% при $Re = 100$ до 35% при $Re = 500$. Ще більш значним є зменшення амплітуди підіймальної сили – від 50% до 70% залежно від числа Рейнольдса.

Одержані результати показують, що для мінімізації енерговитрат, при розробці нових алгоритмів керування обтіканням поганообтічних тіл важливо враховувати топологічні особливості течії.

ВИСНОВКИ

В дисертаційній роботі вирішено актуальну задачу підвищення енергоефективності гідродинамічних систем з обтіканням шляхом розробки нових методів керування пристінною течією на основі властивостей спійманих вихорів. Основні висновки і підсумки роботи полягають в наступному:

1. Аналіз основних методів та способів керування потоком, що застосовуються для розв'язання практичних задач виявив необхідність застосування системного підходу до розробки нових ефективних методів керування потоком які по-перше, базуються на спрощених моделях, по-друге, адекватно описують поведінку гідродинамічної системи, що дає можливість розв'язання ряду нових практичних задач, спрямованих на підвищення енергоефективності гідродинамічних систем.
2. Проведено якісний аналіз тривимірної системи рівнянь Нав'є-Стокса в каналоподібній області. В роботі для розробки методів керування потоком для опису течії пропонується застосовувати скінченновимірну модель, в якій поле течії представляється дискретною множиною перпендикулярних до площини потоку ізольованих вихрових відрізків. Показано, що динаміка цієї системи як в безграничній рідині, так і в областях, обмежених твердою границею, відповідає канонічним рівнянням, де Гамільтоніан співпадає з функцією течії, що дозволяє застосування класичної теорії керування нелінійними динамічними системами для дослідження течії, побудови і обґрунтування методів управління нею. Розглянуто різні стратегії керування потоками рідини, для кожної з них сформульовано задачу керування щодо системи точкових вихорів, локалізованих в обмеженій області за наявності зовнішньої течії.

3. Встановлено нові властивості спійманого вихору поблизу нерівностей поверхні та за наявності збурень потоку.
4. Запропоновано метод керування пристінковим потоком в циліндричних канавках, який відрізняється застосуванням модифікованої моделі спійманого вихору і забезпечує необхідні вимоги до формування структури течії.
5. Розроблено нелінійний контролер пристінної течії, який відрізняється тим, що враховує рівняння рівноваги спійманого вихору відносно його координат, циркуляції, потужності відкачування рідини, кутової координати точки стоку та умову безвідривного обтікання кутів канавки і забезпечує активне керування зі зворотним зв'язком у нестационарному потоці. Розроблений контролер застосований для розрахунку параметрів активної керуючої схеми зі зворотним зв'язком у нестационарному потоці, коли система оперативно реагує на зовнішні збурення. Наведені приклади реалізації цієї схеми, коли швидкість зовнішньої течії змінюється періодично та лінійно.
6. На основі модифікованої моделі спійманого вихору розв'язано задачу зменшення гідродинамічних навантажень квадратного циліндра. Знайдено параметри керування обтіканням квадратного циліндра з фронтальними пластинами, що дозволяють зменшити гідродинамічні навантаження.
7. Ефективність схеми керування перевірено шляхом чисельного моделювання в'язкого обтікання циліндра з фронтальними пластинами в діапазоні середніх чисел Рейнольдса. Отримані результати показали, що керування регуляризує структуру потоку в сліді. Число Струхала в керованому потоці зростає порівняно з некерованим випадком, особливо при збільшенні числа Рейнольдса. Завдяки регуляризації сліду при керуванні зменшується середній опір і флуктуаційні сили, що діють на циліндр. Керування потоком дозволяє знизити коефіцієнт гідродинамічного опору квадратного циліндра від 20% при $Re = 100$

до 35% при $Re = 500$. Ще більш значним є зменшення амплітуди підіймальної сили – від 50% до 70% залежно від числа Рейнольдса.

8. Одержані в роботі результати показують, що для мінімізації енерговитрат, при розробці нових алгоритмів керування обтіканням поганообтічних тіл важливо враховувати топологічні особливості течії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] Бабин, А.В., Вишик, М.И.: Аттракторы эволюционных уравнений. Наука, Москва (1989)
- [2] Белов, И.А., Исаев, С.А., Кробков, В.А.: Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости. Судостроение, Ленинград (1989)
- [3] Белоцерковский, О.М., Давыдов Ю.М.: Нестационарный метод "крупных частиц" для газодинамических расчетов. Ж. Вычисл. Матем. И матем. Физ. **11** (1), 182–207 (1971)
- [4] Белоцерковский, О.М.: Численное моделирование в механике сплошных сред: 2-е изд., перераб. и доп. Физматлит, Москва (1994)
- [5] Белоцерковский, С.М., Котовский, В.Н., Ништ, М.И., Федоров Р.М.: Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. Наука, Москва (1988)
- [6] Белоцерковский, С.М., Ништ, М.И.: Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. Наука, Москва (1978)
- [7] Бэтчелор, Д.: Введение в динамику жидкости. Мир, Москва (1973)
- [8] Вилля, Г.: Теория вихрей. ОНТИ, Москва (1936)
- [9] Гад-эль-Хак, М., Бушнелл, Д.М.: Управление отрывом пограничного слоя. Обзор. Современное машиностроение: серия А. **7**, 2–35 (1991)
- [10] Горбань, Н.В., Капустян, О.В., Капустян, О.А., Хоменко, О.В.: Сильный глобальный аттрактор трехмерной системы уравнений Навье-Стокса в неограниченной каналоподобной области. Проблемы управления и информатики. **6**, 67 – 77 (2015)
- [11] Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Теоретичні моделі керування пристінковими потоками в гідродинамічних системах. Системні дослідження та інформаційні технології. **4**, 87–99 (2014)
- [12] Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Керування пристінковим потоком за

допомогою інтерцептора і відбору рідини. Матеріали 17-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2015, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 22-25 червня 2015

[13] Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Застосування схеми спійманих вихорів до керування потоком навколо квадратної призми. Матеріали 18-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2016, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 30 травня – 2 червня 2016

[14] Горбань В.А., Горбань, І.М.: Численное моделирование отрывных течений вблизи границ потока. Докл. АН УССР. Сер. А, физ. – мат. и техн. науки. **2**, 26–30 (1989)

[15] Горбань В.А., Горбань, І.М.: Вихрова структура потоку при обтіканні квадратної призми: числова модель. Прикладна гідромеханіка. **7** (2), 8–26 (2005)

[16] Згуровский, М.З., Панкратова Н.Д.: Системный анализ. Проблемы, методология, приложения. Наукова думка, Киев (2011)

[17] Коллинз, Ф.Г.: Применение акустических методов и пилообразных выемок на передней кромке для управления пограничным слоем на поверхности крыла. Ракетная техника и космонавтика. **19**(3), 3–5 (1981)

[18] Кочин, Н.Е., Кибель, И.А., Розе, Н.В.: Теоретическая гидромеханика, часть 1. Физ-мат. лит., Москва (1963)

[19] Ладыженская, О. А.: Исследование уравнения Навье–Стокса в случае стационарного движения несжимаемой жидкости. УМН. **14**(3), 75–97 (1959)

[20] Ладыженская, О. А.: О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье–Стокса. Записки научных семинаров ЛОМИ. **27**, 91–115 (1972)

[21] Лифанов, І.К.: Метод сингулярных интегральных уравнений та чисельний експеримент. ТОО Янус, Москва (1995)

[22] Марцинковски, В., Шкадов В.Я.: Численное исследование

двумерного отрыва на основе уравнений Навье-Стокса. Механика жидкости и газа. **1**, 26–32 (1975)

[23] Марчук, Г.И.: Методы расщепления. Наука, Москва (1988)

[24] Мигай, В.К.: Аэродинамическая эффективность прерывистой поверхности. Инженерно-физический журнал. **4**, 20–23 (1962)

[25] Мигай, В.К.: Исследование оребренных диффузоров. Теплоэнергетика. **10**, 55–59 (1962)

[26] Мхитарян, А.М., Лукашук, С.А., Трубенюк, В.Д., Фриланд, В.Я. Влияние вихреобразователей на аэродинамические характеристики крыла и тела вращения. Гидродинамика несущих поверхностей. Наукова думка, Київ, 254–263 (1966)

[27] Патанкар, С.: Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. Энергоатомиздат, Москва (1984)

[28] Пейре, Р., Тейлор, Т.Д.: Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Гидрометеиздат, Ленинград (1986)

[29] Рихтмайер, Р., Мортон, К.: Разностные методы решения краевых задач. Мир, Москва (1972)

[30] Роуч, П.: Вычислительная гидродинамика. Мир, Москва (1980)

[31] Темам, Р.: Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. Мир, Москва (1981)

[32] Фильчаков, П.Ф.: Приближенные методы конформных отображений. Наукова думка, Київ (1964)

[33] Фурсиков, А.В. Реальные процессы и реализуемость метода стабилизации системы Навье-Стокса посредством управления с обратной связью с границы области. Нелинейные задачи математической физики и смежные вопросы. II. В честь О.А.Ладыженской. Междунар. Матем. Серия т.2 . Издательство Т.Рожковской, 127-164 (2002)

[34] Харлоу, Ф.Х.: Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики. Вычислительные методы в гидродинамике. Мир, Москва, 316–342 (1967)

- [35] Чжен, П.: Отрывные течения. В 3-ч т. Мир, Москва (1972-73)
- [36] Чжен, П.: Управление отрывом потока. Мир, Москва (1979)
- [37] Aamo, O.M., Krstic, M.: Flow Control by Feedback. Springer, Berlin (2002)
- [38] Ahuja, S., Rowley, C.W.: Feedback Control of Unstable Steady States of Flow Past a Flat Plate Using Reduced-Order Estimators. *J. Fluid Mech.* **645**, 447–478 (2010)
- [39] Akansu, Y.E., Firhat, E.: Control of flow around a square prism by slot injection from the rear surface. *J. Exp Ther. Fl. Sci.* **34**(7), 906–914 (2010)
- [40] Ali, M., Doolan, C., Wheatley, V.: Aeolian tones generated by a square cylinder with a detached flat plate. *AIAA J.* **51**(2), 291–301 (2013)
- [41] Akervik, E., Hoepfner, J., Ehrenrenstein U., et al.: Optimal Growth, Model Reduction and Control in a Separated Boundary-Layer Flow Using Global Eigenmodes. *J. Fluid Mech.* **579**, 305–314 (2007)
- [42] Antoulas, A.C.: Approximation of Large-Scale Dynamical Systems. *Advances in Design and Control*. SIAM (2005)
- [43] Aref, H., Kadtke, J.B., Zawadski, I.: Point vortex dynamics: recent results and open problems. *J. Fluid Dyn. Res.* **3**, 63–64 (1988)
- [44] Aref, H., Hassan: Point vortex dynamics: A classical mathematics playground. **48**(6), 65–401 (2007)
- [45] Aref, H.: Stirring by chaotic advection. *J. Fluid Mech.* **143**, 1–21 (1984)
- [46] Bagheri, S., Bagheri, S., Brandt, L., Henningson, D.S.: Input-Output Analysis, Model Reduction and Control of the Flat-Plate Boundary Layer. *J. Fluid Mech.* **620**, 263–298 (2009)
- [47] Barbagallo, A., Sipp, D., Schmid, P.J.: Closed-Loop Control of an Open Cavity Flow Using Reduced-Order Models. *J. Fluid Mech.* **641**, 1–50 (2009)
- [48] Bearman, P.W., Obasaju, E.D.: An experimental study of pressure fluctuations on fixed and oscillating square-section cylinders. *J. Fluid Mechanics.* **119**, 297–321 (1982)

- [49] Bearman, P.W.: The effect of base bleed on the flow behind a two-dimensional model with a blunt trailing edge. *J. Aeronaut. Q.* **18**, 207–224 (1967)
- [50] Benettin, G., Galgani, L., Strelcyn, J.M.: Kolmogorov entropy and numerical experiments. *Phys. Rev. A.* **14**, 2338–2345 (1976)
- [51] Bewley, T. R.: Flow control: new challenges for a new Renaissance. *Progress in Aerospace Sciences.* **37** (1), 21–58 (2001)
- [52] Bushnell, D.M.: Turbulent drag reduction of external flows. *AIAA Paper*, 83-0227 (1983)
- [53] Bunyakin, A.V., Chernyshenko, S.I., Stepanov, G.Yu.: High-Reynolds-number Batchelor-model asymptotics of a flow past an airfoil with a vortex trapped in a cavity. *J. Fluid Mech.* **358**, 283–297 (1998)
- [54] Caraballo, E., Little, J., Debiasi, M.: Development and Implementation of an Experimental-Based Reduced-Order Model for Feedback Control of Subsonic Cavity Flows. *J. Fluids En-gin.* **129**, 813–824 (2007)
- [55] Caraballo, T., Kloeden P.E., Real, J.: Unique strong solution and V-attractor of a three-dimensional system of globally modified Navier-Stokes equation. *Advanced Nonlinear Studies.* **6**, 411–436, (2006)
- [56] Chepyzhov, V.V., Vishik, M. I.: *Attractors for equations of mathematical physics.* Rhode Island: American Mathematical Society (2002)
- [57] Chernyshenko, S.I.: Stabilization of trapped vortices by alternating blowing suction. *J. Phys. Fluids.* **7**, 802–807 (1995)
- [58] Cheskidov, A., Foias C.: On global attractors of the 3D Navier-Stokes equations. *J. Dif. Eqs.* **231**, 714–754, (2006)
- [59] Chernyshenko, S.I.: Stabilization of trapped vortices by alternating blowing suction. *J. Phys. Fluids.* **7**(4), 802 -807 (1995)
- [60] Choi, H., Jeon, W. P., Kim, J.: Control of flow over a bluff body. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **40**, 113–139 (2008)
- [61] Chorin, A. J.: Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math.Comput.* **22**, 745–762 (1968)
- [62] Chorin, A. J.: A numerical method for solving incompressible viscous

flow problems. *J. Comput.Phys.* **2**(1), 12–26 (1967)

[63] Chorin, A. J.: *Vorticity and Turbulence*. Berlin: Springer, (1994)

[64] Constantin, P.: Near identity transforms for the Navier-Stokes equations. *Handbook of mathematical fluid dynamics.* **2**, 117–141 (2003)

[65] Cortelezzi, L.: Nonlinear feedback control of the wake past a plate with a suction point on the downstream wall. *Journal of Fluid Mechanics.* **327**, 303–324 (1996)

[66] Cortelezzi, L., Leonard, A. J.: Doyle An example of active circulation control of the unsteady separated flow past a semi-infinite plate. *J . Fluid Mech.* **260**, 127–154 (1994)

[67] Cottet, G.H., Koumoutsakos, P.D : *Vortex Methods: Theory and Practice*. Cambridge University Press (2000)

[68] Coustols, E., Savill, A.M.: Turbulent skin-friction drag reduction by active and passive means. *AGARD Report.* **786**, 8-1–8-80 (1992)

[69] Crowdy, D.G.: A new calculus for two-dimensional vortex dynamics. *J. Theor. Comput. Fluid Dyn.* **24**, 9–24 (2010)

[70] Danilin, A.V., Goloviznin, V.M.: CABARET scheme in vorticity-velocity variables for the numerical modeling of ideal fluid motion in a two-dimensional domain. **24**(5), 45–60 (2012)

[71] Doolan, C.J.: Flat-plate interaction with the near-wake of a square cylinder. *AIAA J.* **47** (2), 475–478 (2009)

[72] Dynnikova, G.Ya.: The integral formula for pressure field in the nonstationary barotropic flows of viscous fluid. *J. Math. Fluid Mech.* **16**, 145–162 (2014)

[73] Igarashi, T.: Drag reduction of a square prism by flow control using a small rod. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* **69–71**, 141–153 (1997)

[74] Inoue, O., Mori, M., Hatakeyama N.: Aeolian tones radiated from flow past two square cylinders in a side-by-side arrangement. *J. Phys. Fluids.* **18**, 46–104 (2006)

[75] Iollo, A., Zanetti L.: Trapped vortex optimal control by suction and

blowing at the wall. *European Journal of Mechanics B-fluids*. **20**(1), 7–24 (2001)

[76] Iollo, A., Zanetti L.: Optimal vortex shedding control. *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering*, Barcelona, 11-14 September 2000

[77] Firati, E., Akansu, Y.E., Hacialiogullar M.: Active control of flow around a square prism by slot injection. *EPJ Web of Conference*. **45**, 1-29 (2013)

[78] Gad-el-Hak, M.: *Flow Control: Passive, Active, and Reactive Flow Management*. Cambridge University Press, London (2000)

[79] Gad-el-Hak, M.: Separation control: review. *Journal of Fluids Engineering*. – 1991. – Vol.113. – P. 5–30.

[80] Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-wall Flows with Irregular Boundaries. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) *Solid Mechanics and Its Applications. Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications*, vol.211, pp.115–129, Springer (2014)

[81] Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active near-wall flow control via a cross groove with suction. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) *Studies in Systems, Decision and Control. Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications*, vol.30, pp.353–367. Springer (2015)

[82] Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Flow control near a square prism with the help of frontal flat plates. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) *Studies in Systems, Decision and Control. Advances in Dynamical Systems and Control*, vol.69, pp.327–350. Springer (2016)

[83] Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Theoretical Models of Flow Control in Near-wall Areas. *Матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2014, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 26-30 травня 2014*

[84] Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active Near-wall Flow Control Via a Cross Groove With Suction. *Матеріали третьої Міжнародної конференції пам'яті члена-кореспондента Національної академії наук України Валерія Сергійовича Мельника «Нелінійний аналіз і застосування», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 1–3 квітня, 2015.*

- [85] Gorban, N.V, Kapustyan, A.V, Kapustyan, E.A, Khomenko, O.V.: Strong Global Attractor for the Three-Dimensional Navier-Stokes System of Equations in Unbounded Domain of Channel Type. *Journal of Automation and Information Sciences*. **47**(11) 48-59 (2015)
- [86] Gorban, N.V., Khomenko, O.V, Paliichuk, L.S, Tkachuk, A.M.: Long-time behavior of state functions for climate energy balance model. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - Series B*. **22**(5), 1887-1897 (2017)
- [87] Gorban, V.A., Gorban, I.M.: Dynamics of vortices in near-wall flows: eigenfrequencies, resonant properties, algorithms of control. *AGARD Report*. **827**, 1–11 (1998)
- [88] Gunzburger, M. D.: *Perspectives in flow control and optimization*. SIAM, Philadelphia (2003)
- [89] Helmholtz, H.: Uber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. *J. Reine Angew. Math.* **55**, 25–55 (1858)
- [90] Hwang R.R., Sue J.C.: Numerical simulation of shear effect on vortex shedding behind a square cylinder. *Int. J. Numer. Meth. Fl.* – 1977. – 25. – P. 1409–1420.
- [91] Hwang, D.P.: Skin-friction reduction by a micro-blowing technique. *AIAA J.* **36**(3), 480–481 (1998)
- [92] Kalman, R., Falb, P. M.: *Arbib Topics in mathematical system theory*. McGraw-Hill, New York, 1969
- [93] Kapustyan, O.V., Pankov, A.V.: Global ϕ -attractor for a modified 3D Benard system on channel-like domains. *Nonautonomous dynamical systems*. **1**, 1–9 (2014)
- [94] Kapustyan, O.V., Mel'nik V. S., Valero J.: A weak attractor and properies of solutions for the three-dimensional Benard problem. *Discrete and continuous dynamical systems*. **18** (2), 449–481 (2007)
- [95] Kapustyan, O.V., Valero J.: Weak and strong attractors for the 3D Navier-Stokes system. *Journal of Differential Equations*. **240**(2), 249–278 (2007)

[96] Kasper, W.A.: Some ideas of vortex lift. J. Society of Automotive Eng. SAE Technical Paper 750547 (1975)

[97] Kasyanov, P.O., Toscano, L., Zadoianchuk N.V.: Topological properties of strong solutions for the 3D Navier-Stokes equations. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Solid Mechanics and Its Applications. Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications, vol.211, pp.181–187. Springer (2014)

[98] Kasyanov, P.O., Zgurovsky, M.Z.: Evolution Inclusions in Nonsmooth Systems with Applications for Earth Data Processing : Uniform Trajectory Attractors for Nonautonomous Evolution Inclusions Solutions with Pointwise Pseudomonotone Mappings. In: D. Gao et al. (eds.) Proceedings in Mathematics and Statistics. Advances in Global Optimization, vol.95. Springer (2014)

[99] Kato, H.: Skin friction reduction by microbubbles. 1st Intern. Symp. on Smart Control in Turbulence, Dec.1999: Proc, Tokyo 1999.

[100] Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-wall Fows with Irregular boundaries. Матеріали 15-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2013, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 27-31 травня 2013

[101] Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-wall Flows with Irregular Boundaries. In: Abstracts of the Crimea International Mathematical Conference: Book of Abstracts. Sudak, 22 september–4 october 2013.

[102] Khomenko, O.V.: On Strong Global Attractor for the Three-Dimensional Navier-Stokes System of Equations in Unbounded Domain of Channel Type. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, 18-23 September 2017

[103] Kim, J.: Control of turbulent boundary layers Phys. Fluids. **15**,1093–1105 (2003)

[104] King, R., Mehrmann, V., Nitsche W.: Active Flow Control—A Mathematical Challenge. In: Grottschel M., Lucas K., Mehrmann V. (eds) Production Factor Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg (2010)

[105] Knisely, C.W.: Strouhal number of rectangular cylinders at incidence:

a review and new data. *J. Fluids and Structures*. **4**, 371–393 (1990)

[106] Koenig, K., Roshko, A.: An experimental study of geometrical effects on the drag and flow field of two bluff bodies separated by a gap. *J. Fluid Mech.* **156**, 167–204 (1990)

[107] Kramer, M.O.: Boundary layer stabilisation by distributed damping. *J. Aero. Sci.* **24**, 459–460 (1957)

[108] Kramer, M.O.: Boundary layer stabilisation by distributed damping. *J. Am. Soc. Nav. Engr.* **72**, 25–33 (1960)

[109] Kramer, M.O.: Boundary layer stabilisation by distributed damping. *J. Am. Soc. Nav. Engr.* **74**, 341–348 (1962)

[110] Kulik, V.M., Semenov, B.N.: The measurement of dynamic properties of viscoelastic materials for turbulent drag reduction. In: Choi, K.-S., Prasad, K.K., Truong, T.V. (eds.) *Emerging Techniques in Drag Reduction*. MEP, London 207–217 (1996)

[111] Ladyzhenskaya, O.A.: *Attractors for semigroups and evolution equations*. Cambridge University Press, N.Y. (1991)

[112] Lamb, G.: *Hydromechanics*. Cambridge University Press, London (1916)

[113] Lighthill, M.J.: *Laminar boundary layers*. Chap. II. Oxford University Press, London (1969)

[114] Lions, J.L.: *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Springer-Verlag, New York (1971)

[115] Lin, C.C.: On the motion of vortices in two dimensions – I. Existence of the Kirchhoff–Routh function. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. **27**(2), 570–575 (1941)

[116] Lin, C.C.: On the motion of vortices in two dimensions – II. Some further investigations on the Kirchhoff–Routh function. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. **27**(2), 575–577 (1941)

[117] Liu, Z., Kopp, G.A.: High-resolution vortex particle simulations of flows around rectangular cylinders / Z.Liu, G.A. // *J. Comp Fluids*. **40**, 2–21

(2011)

[118] Loehrke, R.I., Nagib, H.M.: Control of free stream turbulence by means of honeycombs: A balance between suppression and generation. *Transaction of the ASME, of Fluid Engineering*. **98**(3),342–353 (1976)

[119] Lofdahl, L., Gad-el-Hak, M.: MEMS applications in turbulence and flow control. *Progress in Aerospace Sci.* **35**, 101–203 (1999)

[120] Lubinsky, G.: Flow Control Applied to the Front Rounded Edge of a Bluff Body. *International Journal of Flow Control*. **2**, 21–42 (2014)

[121] Lumley J.L.: Drag reduction in two phase and polymer flows. *Physics of Fluids*. **20**(10), 64–71 (1977)

[122] Majda, A.J., Bertozzi, A.L: *Vorticity and Incompressible Flow*. Cambridge University Press, Cambridge (2002)

[123] McCormick, M.E., Bhattacharyya, R.: Drag reduction of a submersible hull by electrolysis. *Naval Engineers J.* **85** (2), 11–16 (1973)

[124] McWilliams, J. C.: *Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, Cambridge (2006)

[125] Meleshko, V.V., van Heijst, G.J.F.: Interacting two-dimensional vortex structures: point vortices, contour kinematics and stirring properties. *Chaos, Solutions and Fractals*. **4**, 977–1010 (1994)

[126] Meleshko, V.V., Aref, H.: A bibliography of vortex dynamics 1858–1956. *Advances in Applied Mechanics*. **41**, 197–292 (2007)

[127] Merkle, C.L., Deutsch, S.: Viscous Drag Reduction in Boundary Layers. *Progress in Astronautics and Aeronautics*. **123**, 351–412 (1990)

[128] Milne-Thompson, L.M.: *Theoretical Hydrodynamics*. Macmillan & Co., London (1968)

[129] Nagano, S., Naito, M., Takata, H.A.: A numerical analysis of two-dimensional flow a rectangular prism by a discrete vortex model. *Computers and Fluids*. **10**, 243–259 (1982)

[130] Newton, P.K.: *The N-Vortex Problem. Series: Applied Mathematical Sciences, Analytical Techniques*. Springer, New York **145**, (2001)

- [131] Noack, B.R., Afanasiev, K., Morzynsky, M., Tadmor, G., Thiele F.: A Hierarchy of Low-Dimensional Models for the Transient and Post-Transient Cylinder Wake. *J. Fluid Mech.* **497**, 335–363 (2003)
- [132] Nowakowski, A., Rocicki, J., Styczek A.: The pressure problem in the stochastic vortex blob method. *ESAIM Proceed.* **1**, 125–134 (1996)
- [133] Norberg, C.: Flow around rectangular cylinders: pressure forces and wake frequencies. *J. Wind Eng. Ind. Aero.* **49**, 187–195 (1993)
- [134] Okajima, A.: Strouhal number of rectangular cylinders. *J. Fluid Mech.* **123**, 379–398 (1982)
- [135] Okajima, A., Sugitani, K.: Strouhal number and base pressure coefficient of a rectangular cylinder. *J. Trans ASME.* **50**, 2004–2010 (1984)
- [136] Onsager, L.: Statistical hydromechanics. I *Nuovo Cimento.* **6**(2) (1949)
- [137] Patancar, S.V., Spolding, P.V.: Calculation Procedure for Heat, Mass, and Momentum Transfer in Threedimensional Parabolic Flows. *Int.j.Heat and Mass Transfer.* **15**, 1787–1806 (1972)
- [138] Perry, A.E., Chong, M.S.: A description of eddying motions and flow patterns using critical-point concepts. *Ann. Rev. Fl. Mech.* **19**, 125–155 (1987)
- [139] Peaceman, D.W., Rachford, H.H.: The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3**(1), 28–41 (1955)
- [140] Prandtl, L.: *Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung* Proc. Third Int. Math.Congr.Heidelberg, Germany. 484–491 (1904)
- [141] Protas, B., Wesfreid, J.E.: Drag force in the open-loop control of the cylinder wake in the Laminar Regime. *Physics of Fluids.* **14** (2), 810–826 (2002)
- [142] Protas, B., Styszczek A.: Optimal rotary control of the cylinder wake in the laminar regime. *J. Phys. Fl.* **14** (7), 2073–2087 (2002)
- [143] Protas, B.: Vortex dynamics models in flow control problems. *Nonlinearity.* **21** (9) 1–54 (2008)
- [144] Raffaele, D.S., Fabrizio, De Gregorio, Pierluigi, I.: Flow Separation

Control by Trapped Vortex. 48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition, Orlando, Florida 4 - 7 January (2010)

[145] Ringleb, F.O.: Two-Dimensional Flow with Standing Vortex in Ducts and Diffusers, *ASME J. Basic Eng.* **82** (4), 921–927 (1960)

[146] Romito, M.: The uniqueness of weak solutions of the globally modified Navier-Stokes equations. *Advanced Nonlinear Studies.* **9**, 425–427 (2009)

[147] Rosenhead, L.: The formation of vortices from a surface of discontinuity. *Proceedings of the royal society A.* 170–192 (1931)

[148] Posa, R.: The global attractor for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains. *Nonlinear analysis.* **32** (1) 71–85 (1998)

[149] Roshko, A.: On the drag and shedding frequency of two-dimensional bluff bodies. NASA Tech. Note., National Advisory Committee for Aeronautics, Washington (1954).

[150] Rowley, C.W.: Model Reduction for Fluids, Using Balanced Proper Orthogonal Decomposition. *Int. J. Bifurcation Chaos.* **15** (2015)

[151] Rowley, C. W.: Dynamics and Control of High-Reynolds-Number Flow over Open Cavities. *Annual Reviews of Fluid Mechanics.* **38**, 251–276 (2006)

[152] Saffman, P.G.: Flow over a wing with an attached free vortex. *Stud. Appl. Math.* **57**, 107–117 (1977)

[153] Shimizu, M., Tanida, Y.: On the fluid forces acting on rectangular sectional cylinders. *Trans. JSME.* **44**, 2699–2706 (1978)

[154] Sohankar, A., Norberg, C., Davidson, L.: Simulation of three-dimensional flow around a square cylinder at moderate Reynolds numbers. *J. Phys. Fluids.* **11**(2), 288–306 (1999)

[155] Temam, R.: Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. *Appl.Math.Sci* **68** , Springer, New York: (1988).

[156] Turki, S.: Numerical simulation of passive control of vortex shedding behind square cylinder using splitter plate. *J. Eng. Appl. of Comp. Fl. Mech.* **2**,(4)

514–524 (2008)

[157] Uhlman, J.S.: An integral equation formulation of the equations of motion of an incompressible fluid. NUWC-NPT Technical Report (1992)

[158] Vickery, B.J.: Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross-section in a smooth and in a turbulent stream. *J. Fluid Mechanics*. **25**, 481–494 (1996)

[159] Villat, H.: *Mecanique desuides*. Gauthier–Villars, Paris (1933)

[160] Walsh, M.J.: Drag characteristics of V-groove and transverse curvature riblets. *Viscous Drag Reduction*. Washington, DC: AIAA, 168–184 (1980)

[161] Walsh, M.J.: Riblets. *Viscous Drag Reduction in Boundary Layers*. Washington, DC: AIAA, 203–261 (1990)

[162] Wang, C.M., Wu, J.C.: Numerical solution of steady Navier-Stokes problems using integral representations. *AIAA J.* **8**, 1305–1312 (1986)

[163] Wu, J.Z., Vakili, A.D., Wu, J.M.: Review of the physics of enhancing vortex lift by unsteady excitation. *Progress in Aerospace Sciences*. **28**(2) 73–131 (1991)

[164] Wu, J.C.: Numerical boundary conditions for viscous flow problems. *AIAA J.* **14** (8), 1042–1049 (1976)

[165] Zabczyk, J.: *Mathematical Control Theory: An Introduction*. Birkhauser (1992)

[166] Zdravkovich, M.M.: Review and classification of various aerodynamic and hydrodynamic means for suppressing vortex shedding. *J. Wind Eng. Ind. Aerodyn.* **7**, 145–189 (1981)

[167] Zgurovsky, M.Z., Kasyanov, P.O., Kapustyan O.V.: Evolution inclusions and variation inequalities for Earth data processing III. Long-time behavior of evolution inclusions solutions in Earth data analysis. Springer, Berlin (2012)

[168] Zgurovsky, M.Z., Mel'nik, V.S., Kasyanov, P.O.: Evolution inclusions and variation inequalities for Earth data processing I. *Advances in*

Mech. and Math. Springer, Berlin (2011)

[169] Zhou, C.Y., Wang, C., Islam, S.U. et al.: Numerical study of fluid force reduction on a square cylinder using a control plate. Proceedings of the Nineteenth International Offshore and Polar Engineering Conference. Osaka, Japan, June 21-26 2009

ДОДАТОК А



18.01.2018 № а 1801/13

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи Хоменко Ольги Володимирівни на тему «Керування потоком в гідродинамічних системах на основі властивостей спійманих вихорів» на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

Результати дисертаційної роботи «Керування потоком в гідродинамічних системах на основі властивостей спійманих вихорів» впроваджені в роботу ННК «Світовий центр даних з геоінформатики та сталого розвитку». Застосування результатів якісного та кількісного аналізу гідродинамічних систем та дослідження глобальної динаміки функцій стану систем, що описуються рівняннями Нав'є-Стокса, дозволили підвищити ефективність аналізу даних та покращити точність прогнозування та передбачення поведінки складних систем гідродинамічного типу.

Директор



К.В.Єфремов

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Директор ННК «ІПСА»

КПІ ім. Ігоря Сікорського,

доктор фізико-математичних наук, доцент

П.О. Касьянов

20 14 року

АКТ

про впровадження результатів дисертаційної роботи молодшого наукового співробітника науково-дослідного відділу системної математики ННК «ІПСА» Хоменко Ольги Володимирівни на тему «Керування потоком в гідродинамічних системах на основі властивостей спійманих вихорів» на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.04 – системний аналіз і теорія оптимальних рішень.

Комісія у складі:

Голова – професор кафедри математичних методів системного аналізу, д.т.н., проф. П.І. Бідюк;

Члени комісії:

професор кафедри математичних методів системного аналізу, д.т.н., проф.

В.Я. Данилов;

завідувач НДВ прикладного нелінійного аналізу, д.ф.-м.н., проф.

О.С. Макаренко

цим актом засвідчує, що результати дисертаційної роботи Хоменко Ольги Володимирівни на тему «Керування потоком в гідродинамічних системах на основі властивостей спійманих вихорів» впроваджені в навчальний процес ІПСА.

Одержані О.В.Хоменко нові наукові результати, отримані при дослідженні гідродинамічних систем, а саме розроблені способи керування потоком на основі властивостей спійманих вихорів в гідродинамічних системах з обтіканням, використовуються при викладанні теоретичного матеріалу навчальних дисциплін «Елементи нелінійного аналізу» та «Системний аналіз стохастично розподілених процесів».

Голова комісії

д.т.н., проф.

П.І. Бідюк

Члени комісії

д.т.н., проф.

В.Я. Данилов

д.ф.-м.н., проф.

О.С. Макаренко

ДОДАТОК В

1. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Dynamics of Vortices in Near-wall Flows with Irregular Boundaries. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Solid Mechanics and Its Applications. Continuous and Distributed Systems: Theory and Applications, vol.211, pp.115–129. Springer (2014).
2. Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Теоретичні моделі керування пристінковими потоками в гідродинамічних системах. Системні дослідження та інформаційні технології. **4**, 87–99 (2014).
3. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active near-wall flow control via a cross groove with suction. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Studies in Systems, Decision and Control. Continuous and Distributed Systems II: Theory and Applications, vol.30, pp.353–367. Springer (2015).
4. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Flow control near a square prism with the help of frontal flat plates. In: Zgurovsky, M.Z., Sadovnichiy, V.A. (eds.) Studies in Systems, Decision and Control. Advances in Dynamical Systems and Control, vol.69, pp.327–350. Springer (2016).
5. Gorban, N.V., Khomenko, O.V., Paliichuk, L.S, Tkachuk, A.M.: Long-time behavior of state functions for climate energy balance model. Discrete & Continuous Dynamical Systems - Series B. 22(5), 1887-1897 (2017).
6. Горбань, Н.В., Капустян, О.В., Капустян, О.А., Хоменко, О.В.: Сильный глобальный аттрактор трехмерной системы уравнений Навье-Стокса в неограниченной каналоподобной области. Проблемы управления и информатики. **6**, 67 – 77 (2015)
7. Khomenko, O.V.; Dynamics of Vortices in Near-wall Flows with Irregular Boundaries. In: Abstracts of the Crimea International Mathematical Conference: Book of Abstracts. Sudak, 22 september–4 october 2013.
8. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.; Theoretical Models of Flow Control in Near-wall Areas. Матеріали 16-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2014, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 26-30 травня, 2014.

9. Gorban, I.M., Khomenko, O.V.: Active Near-wall Flow Control Via a Cross Groove With Suction. Матеріали третьої Міжнародної конференції пам'яті члена-кореспондента Національної академії наук України Валерія Сергійовича Мельника «Нелінійний аналіз і застосування», ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 1–3 квітня, 2015.

10. Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Керування пристінковим потоком за допомогою інтерцептора і відбору рідини. Матеріали 17-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2015, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 22-25 червня, 2015.

11. Горбань, І.М., Хоменко, О.В.: Застосування схеми спійманих вихорів до керування потоком навколо квадратної призми. Матеріали 18-ї Міжнародної науково-технічної конференції SAIT 2016, ННК «ІПСА» НТУУ «КПІ», Київ, 30 травня – 2 червня, 2016.

12. Khomenko, O.V.: On Strong Global Attractor for the Three-Dimensional Navier-Stokes System of Equations in Unbounded Domain of Channel Type. In: Abstracts of the International Conference in Functional Analysis dedicated to the 125th anniversary of Stefan Banach, Lviv, 18-23 September, 2017.

Апробація результатів дисертації

Результати дисертації доповідались та обговорювались на :

- серії спільних наукових семінарів ННК «ІПСА» КПІ ім. Ігоря Сікорського та механіко-математичного факультету МДУ імені М.В. Ломоносова (2012, 2014, 2015);
- семінарі НДВ системної математики ННК «Інститут прикладного системного аналізу»;
- Кримській міжнародній математичній конференції «КММК-2013», Судак, 22 вересня – 4 жовтня 2013р.,
- 16-й міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології SAIT 2014», Київ, 26 – 30 травня 2014р.,
- 3-й міжнародній науковій конференції пам'яті член-кореспондента НАН

України В.С. Мельника «Нелінійний аналіз та застосування», Київ, 01 – 03 квітня 2015р.,

– 17-й міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології SAIT 2015», Київ, 22 – 25 червня 2015р.,

– 18-й міжнародній науково-технічній конференції «Системний аналіз та інформаційні технології SAIT 2016», Київ, 30 травня – 2 червня 2016р.,

– на Міжнародній конференції з функціонального аналізу, присвяченій 125-річчю від дня народження Стефана Банаха (м. Львів, 2017 р.).